Zentrum für schulpraktische Lehrerausbildung Leverkusen

Seminar für das Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen

Brückenstr. 10-12 — 51379 Leverkusen

Schriftliche Arbeit gemäß § 32 (5) OVP 2011 im Fach Mathematik

Prüfling:	Dr. Wieczorek, Daniel Johann
Ausbildungsschule:	Freiherr-vom-Stein-Gymnasium Leverkusen
Datum der Prüfung:	Montag, 06.03.2017
Unterrichtszeit:	9:00 – 9:45
Lerngruppe:	EF M1
Lerngruppengröße:	26
anwesender Fachlehrer:	Reiner Behrendt

Thema der unterrichtspraktischen Prüfung:	Wenn der HIV-Test positiv ausfällt, dann habe ich HIV... oder?! Aufgabengesteuerte Erarbeitung der bedingten Wahrscheinlichkeit, dass eine Krankheit vorliegt, wenn ein Test positiv ausfällt.
Bezeichnung der zugehörigen Unterrichtsreihe	Testergebnisse richtig interpretieren – Vom Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten

Prüfungsausschuss

Vorsitz:

Seminarausbilder:

(an der Ausbildung beteiligt)

Seminarausbilder:

(an der Ausbildung nicht beteiligt)

Inhaltsverzeichnis

1 Langfristige Planung des Unterrichtsvorhabens

1.1 Aufbau des Unterrichtsvorhabens

Datum	Thema	Kompetenzzuwachs
06.03.2017	**Wenn der HIV-Test positiv ausfällt, dann habe ich HIV... oder?! Aufgabengesteuerte Erarbeitung der bedingten Wahrscheinlichkeit, dass eine Krankheit vorliegt, wenn ein Test positiv ausfällt.**	Realsituation eines Tests in ein math. Modell übersetzen und $P(K\|T)$ berechnen und interpretieren können
07.03.2017	Wieso wird in Deutschland mehrfach getestet? Einführung des Einheitsquadrats am Beispiel des Western-Blot-Tests Positiv getestet - was nun? Erörterung der Sinnhaftigkeit eines HIV-Screenings	Bedingte Wahrscheinlichkeiten definieren und Einheitsquadrat interpretieren können
10.03.2017	entfällt (Tausch 03.03.2017)	
14.03.2017	Warum ist bei Heroinabhängigen *ein* HIV-Test ausreichend? Einführung der Vierfeldertafel anhand der Bedeutung der Prävalenz mit GeoGebra	Vierfeldertafel anlegen und interpretieren können
17.03.2017	Ein verbesserter HIV-Test? Von Testergebnissen zurück zu Testparametern	Baumdiagramme umkehren können
21.03.2017	Selbstdiagnose und Übung	individuell verschieden
22.03.2017	Klausur	—
24.03.2017	Nur 1% der Menschen tragen dieses Merkmal, Sie sind mit 99%iger Wahrscheinlichkeit schuldig! Bedingte Wahrscheinlichkeiten vor Gericht	Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Darstellungsformen außerhalb des medizinischen Kontexts anwenden können
29.03.2017	Aus welcher Urne wurden die Kugeln wohl gezogen? Ein Exkurs in Bayesianischem Schließen	Posterior-Wahrscheinlichkeiten berechnen und interpretieren können
31.03.2017	Was ist in dieser Reihe fundamental anders als bei vielen Glücksspielen? Einführung der stochastischen Unabhängigkeit	Stochastische (Un-)Abhängigkeit erläutern und nachweisen können
04.04.2017	Übung und Vertiefung	individuell verschieden
07.04.2017	Rückgabe und Besprechung der Klausur	—

1.2 Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen[1]

- modellieren Sachverhalte mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vier- oder Mehrfeldertafeln,
- bestimmen bedingte Wahrscheinlichkeiten,
- prüfen Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente auf stochastische Unabhängigkeit,
- bearbeiten Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten.

Prozessbezogene Kompetenzen:
Modellieren: Die Schüler

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren),
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren),
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren).

Kommunizieren: Die Schüler

- erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten (Rezipieren),
- wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (Produzieren).

1.3 Sachanalyse

Ein medizinischer Test dient der Feststellung, ob ein Mensch an einer bestimmten Erkrankung leidet. In der Praxis ist der Test aber nicht absolut zuverlässig, sodass sich für die informierte Entscheidung einer Patientin in Bezug auf folgende medizinische Behandlungen die Frage stellt, wie sicher ein positives Testergebnis eine Erkrankung anzeigt.

Aus Gründen der Zugänglichkeit gehen wir dabei von der fiktiven Situation aus, dass alle Menschen getestet wurden. Als mathematisches Modell dient in dieser Situation ein Laplace-Raum (Ω, P), wobei Ω die Menge aller Menschen ist. Ω besitzt eine objektive, d.h. vom Test unabhängige disjunkte Zerlegung in die Menge der Erkrankten K und ihr Komplement, $\Omega = K \dot{\cup} \overline{K}$. Die Wahrscheinlichkeit $P(K)$, dass ein zufällig ausgewählter Mensch erkrankt ist, bezeichnet man als Prävalenz. Zusätzlich gibt es eine Zerlegung $\Omega = T \dot{\cup} \overline{T}$, wobei T die positiv Getesteten enthält.

Die Zuverlässigkeit des Tests wird durch die Richtig-Positiv-Rate (Sensitivität) beschrieben. In der Praxis testet man sicher Erkrankte und schätzt aus der relativen Häufigkeit der positiven Ergebnisse die sog. bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der Test positiv ausfällt, wenn die Erkrankung vorliegt. Dies motiviert die Definition

$$P(T|K) := \frac{|K \cap T|}{|K|} = \frac{P(K \cap T)}{P(K)} \quad \text{(lies: P von T gegeben K)} .$$

[1]Dieser Text verwendet die von Nothbaum und Steins (2010) vorgeschlagene stochastische Genuswahl für eine geschlechtergerechte, aber dennoch gut lesbare und orthographisch korrekte Sprache, bei der das verwendete Genus durch einen Münzwurf gewählt wird.

Analog heißt $P(\overline{T}|\overline{K})$ Richtig-Negativ-Rate (Spezifität) des Tests.

Für die Diagnostik ist hingegen $P(K|T)$ interessant. Die zur Berechnung notwendige Wahrscheinlichkeit $P(T)$ folgt aus dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit, wenn zusätzlich auch die Prävalenz bekannt ist: $P(T) = P(T|K)P(K) + P(T|\overline{K})P(\overline{K})$. Zusammen mit der Eigenschaft $P(K) + P(\overline{K}) = 1$ ergibt sich

$$P(K|T) = \frac{P(T|K)P(K)}{P(T|K)P(K) + P(T|\overline{K})P(\overline{K})} = \frac{P(T|K)}{\frac{1-P(\overline{T}|\overline{K})}{P(K)} + P(T|K) + P(\overline{T}|\overline{K}) - 1} .$$

Die erste Gleichung wird als Bayes-Gleichung bezeichnet. Die rechte Seite enthält nur noch Testparameter und die Prävalenz. Sie zeigt ein kontraintuitives Verhalten: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein gegebener Test eine Erkrankung korrekt anzeigt, ist keine Eigenschaft des Tests allein, sodern wächst streng monoton mit der Prävalenz der Erkrankung.

Für einen in Frankreich frei verkäuflichen HIV-Selbsttest ergibt sich bei einer Sensitivität von 99.1%, einer Spezifität von 99.5% und einer Prävalenz von 0.1%, dass ein positiver Test nur mit der Wahrscheinlichkeit $P(K|T) = 16.6\%$ eine Erkrankung anzeigt[2]. Würde der Test erneut durchgeführt, aber im Lichte dieser Posteriorwahrscheinlichkeit bewertet, so deuten zwei positive Resultate mit einer Wahrscheinlichkeit von 97.5% auf eine Erkrankung hin.

Der dargestellte Zusammenhang ist zudem ein paradigmatisches Beispiel für stochastische Abhängigkeit zweier Ereignisse, die formal durch $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ gefasst wird. Damit gilt insbesondere $P(A|B) = P(A)$ und $P(B|A) = P(B)$. Dies ist für einen Test intuitiv klar, da die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Ausgang vom Vorliegen der Erkrankung abhängen muss.

1.4 Lernvoraussetzungen und Lernausgangslage

Der Autor unterrichtet den Kurs durchgehend seit Schuljahresbeginn, zunächst selbstständig und nun im Ausbildungsunterricht. Die Lerngruppe zeichnet sich durch einen hohen Anteil guter bis sehr guter Leistungen und eine rege Beteiligung in der sonstigen Mitarbeit aus; insbesondere in Arbeitsphasen ist die sachbezogene Aktivität in der Regel hoch und die meisten Schülerinnen sind in der Lage, ihre Lernschwierigkeiten recht präzise zu benennen und so passgenaue Unterstützung einzufordern. Auch im Unterrichtsgespräch beteiligt sich etwa die Hälfte des Kurses regelmäßig freiwillig. Dem gegenüber steht lediglich eine handvoll Fälle, die derzeit auch aus Sicht der Kollegen fächerübergreifend wenig intrinsische Motivation aufbringen; leistungsbezogen akut bedroht ist allerdings nur ein Schüler. Da der mittlere Schulabschluss im Zuge der Schulzeitverkürzung erst nach der

[2] Eine radikal subjektive Interpretation zeigt unmittelbar die Grenzen der Modellierung auf: Eine subjektive Überzeugungssteigerung um 16500% (!) setzt aus Sicht des Autors u.a. voraus, dass die Testperson nicht mit der Anwendung der Bayes-Gleichung vertraut ist und zudem ignoriert, dass eine HIV-Infektion nicht rein zufällig ist, sondern einen Übertragungsweg voraussetzt, sodass statt $P(K|T)$ die Form $P(K|T \cap \ldots)$ unter Einschluss weiterer subjektiver Überzeugungsgrade berechnet werden müsste.

Einführungsphase erworben wird, vertritt der Autor dezidiert die Auffassung, dass durch eine zu strenge Auslegung der sog. “Bringschuld” im Bereich der sonstigen Mitarbeit eine erhebliche Benachteiligung im Vergleich zu Schülerinnen anderer Schulformen entstünde. Daher wird in diesen Fällen sowohl aktiv ein Unterstützungsangebot in Arbeitsphasen gemacht als auch zu Wortbeiträgen aufgefordert. Eine Schülerin und ein Schüler haben das erste Halbjahr im Ausland verbracht. Für die geplante Reihe ist dies irrelevant, da seit Halbjahresbeginn Stochastik unterrichtet wird.

Ein Diagnosetest zum Beginn der vorhergehenden Reihe zeigte, dass Grundvorstellungen zur Wahrscheinlichkeit vorhanden waren und die Pfadregeln von etwa zwei Dritteln des Kurses auf ein zweistufiges Zufallsexperiment angewendet werden konnten. Der prognostische Wahrscheinlichkeitsbegriff und die Wahrscheinlichkeitsverteilung wurden mit asymmetrischen Lego-Würfeln wiederholt, der Erwartungswert als arithmetisches Mittel auf lange Sicht eingeführt und die aus der Mittelstufe bekannten Pfadregeln vertieft und in zahlreichen Kontexten angewandt. Aus Beobachtungen während Arbeitsphasen und im Unterrichtsgespräch kann abgeleitet werden, dass die fachlichen Lernvoraussetzungen für die Reihe zu Testergebnissen bei allen vorhanden sind.

HIV wurde bereits im Biologieunterricht der Klasse 9 thematisiert. Die von Kaiser (2015, S. 14) geäußerte Befürchtung, dass der Kontext zu brisant für den Unterricht sein könnte, dürfte daher auf die Lerngruppe nicht zutreffen.

1.5 Didaktische Überlegungen

Die Leitidee “Daten und Zufall” durchzieht im Sinne eines Spiralcurriculums den Mathematikunterricht von der Grundschule bis zur gymnasialien Oberstufe. Sie hat eine hohe lebenspraktische Relevanz, da Entscheidungsprozesse auf persönlicher wie gesellschaftlicher Ebene, sofern sie bewusst geschehen, häufig die kritische Interpretation von Daten und Wahrscheinlichkeitsaussagen erfordern. Der Stochastikunterricht leistet daher einen wesentlichen Beitrag zur Erziehung zu mündigen, kritisch denkenden Staatsbürgern.

Die vorliegende Unterrichtsreihe adaptiert und erweitert einen Vorschlag von Dreibholz zur Implementierung des Kernlehrplans (2014), sodass die Passung der Inhalte mit den Anforderungen des Lehrplans gegeben ist. Dies trifft auch auf das schulinterne Curriculum zu, für das dieses Unterrichtsvorhaben aus dem Beispielcurriculum des Lehrplannavigators übernommen wurde.

Der gewählte Kontext des HIV-Tests hat eine gegenwärtige Bedeutung für die Schülerinnen, da in ihrem Alter Intimität zu den bedeutenden Entwicklungsaufgaben gehört (Wisniewski 2013, S. 73) und daher nach ersten sexuellen Kontakten auch der Wunsch bestehen könnte, einen solchen Test durchführen zu lassen. Dieser Bezug wäre etwa durch einen Einstieg über das Brustkrebs-Screening nicht gegeben. Zudem hat die Sozial-AG am vergangenen Welt-Aids-Tag Poster der Bundeszentrale für gesundheitliche Aufklärung (BzgA) an zahlreichen Durchgangstüren angebracht, sodass das Thema HIV an unserer

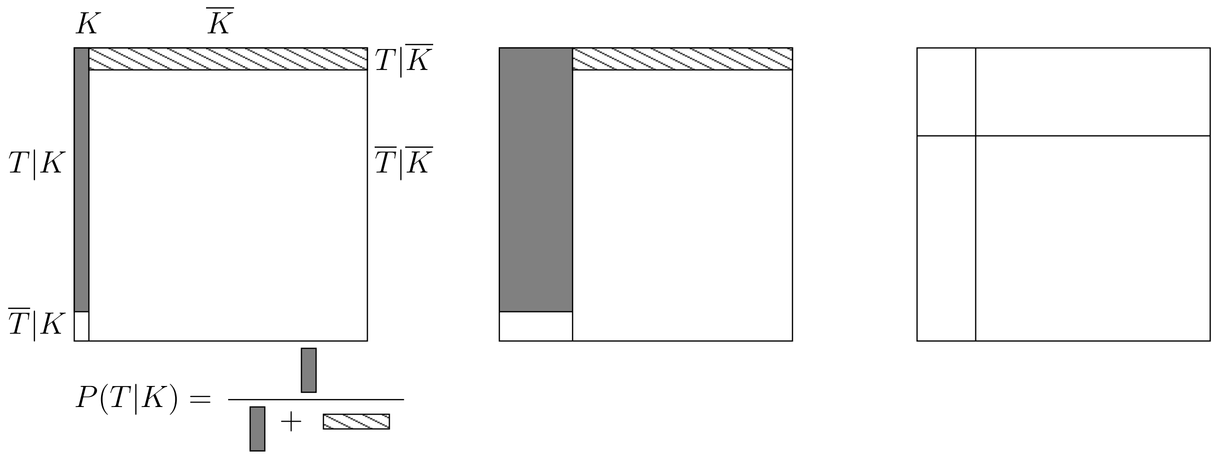
Schule aktuell präsent ist. Der HIV-Test ist außerdem ein Exemplum für einen allgemeinen Sachverhalt und erweitert die Zukunftsbedeutung der Inhalte mindestens auf alle medizinischen Tests, denen sich die Schüler oder ihr Umfeld beispielsweise im Rahmen von Screeningprogrammen unterziehen werden. Somit entspricht der gewählte Kontext der motivationspsychologischen Forderung nach sinnstiftenden Bezügen zur Lebenswelt der Schüler in besonderem Maße (Wisniewski 2013, S. 49). Die Einbettung erzwingt zudem das permanente Durchlaufen des Modellierungskreislaufs und dient daher der Ausschärfung der entsprechenden prozessbezogenen Kompetenzen. Aus einer allgemeineren Perspektive betrachtet unterstützt dieses Vorgehen darüber hinaus das Bild von Mathematik als einem Prozess, in dessen Verlauf Begriffe zur Lösung von Problemen entwickelt werden, im Gegensatz zu dem Bild einer statischen Struktur, die von den Schülern lediglich rezipiert werden soll.

Der Gegenstand der Reihe unterliegt einigen kognitiven Schwierigkeiten, etwa der mangelhaften Trennung einfacher und bedingter Wahrscheinlichkeiten, der Verwechselung des bedingten und bedingenden Ereignisses, dem unterschätzten Einfluss der Prävalenz und der Identifikation von $P(K|T)$ mit $P(T|K)$ (Eichler und Vogel 2015, S. 214). Die letzten Punkte sind besonders schwerwiegend, da sie auch im professionellen Umfeld vorkommen und zu einer mangelhaften Information von Patienten und damit auch potentiell zu teuren und unnötigen Übertherapieren führen können (Gigerenzer 2002, S. 95f): Beispielsweise unterläuft 47% der von Gigerenzer auf einem Kongress befragten Gynäkologen dieser Fehler in Bezug auf das Mammographie-Screening (Gigerenzer 2007). Für den Unterricht ist dieses Ergebnis durchaus gewinnbringend, da die (korrekte) Berechnung im mathematischen Modell aufgrund der mangelnden Intuition im krassen Gegensatz zu naiven Schätzwerten liegt und damit ein besonderes Augenmerk auf den Rückbezug des mathematischen Modells auf die Realität gelegt wird[3].

Die Untersuchung von Gigerenzer (2007) belegte, dass die Befragten signifikant besser abschnitten, wenn die Testdaten als absolute Häufigkeiten statt als Wahrscheinlichkeiten präsentiert wurden. Daher wird in der Unterrichtsreihe das Umrechnen von Wahrscheinlichkeitsangaben auf absolute Häufigkeiten als entscheidende Heuristik propagiert, die in allen behandelten Fällen eine der direkten Vorstellung zugängliche Lösung ermöglicht. Aus lernpsychologischer Sicht entspricht der Übergang von absoluten Häufigkeiten über konkrete Wahrscheinlichkeiten hin zur Verwendung von Variablen in Formeln dem Weg von Konkreten zum Abstrakten.

Wie für reale stochastische Problemstellungen typisch, liegen die im Unterricht behandelten Probleme in Textform vor. Eine wesentliche Strategie zur Lösung liegt im Wechsel der Darstellungsform. Verwendet wird hier neben den bekannten Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln auch das sog. Einheitsquadrat (Eichler und Vogel, S. 81ff):

[3] Ein Vergleich verdeutlicht dies: Soll etwa die Höhe eines Gebäudes ermittelt werden, so besitzt man bereits im Vorfeld durch den Vergleich mit der eigenen Körpergröße eine recht präzise Vorstellung über die zu erwartende Größenordnung.



Der Flächeninhalt eines Quadrats symbolisiert dabei die totale Wahrscheinlichkeit 1. Das Quadrat wird vertikal im Verhältnis $P(K) : P(\overline{K})$ geteilt, die beiden entstehenden Rechtecke im Verhältnis $P(T|K) : P(\overline{T}|K)$ bzw. $P(T|\overline{K}) : P(\overline{T}|\overline{K})$. Im Kontext sind die oberen linken Rechtecke relevant, da sie gemeinsam $P(T)$ repräsentierten. $P(K|T)$ ist dann das Verhältnis der Rechteckfläche oben links zu den beiden markierten, sodass diese Darstellungsform besonders geeignet ist, die Bedeutung der Prävalenz auch ikonisch zu codieren. Zudem hat das Einheitsquadrat den Vorteil, dass die stochastische Unabhängigkeit sichtbar wird: diese liegt genau dann vor, wenn das Quadrat durch genau eine horizontale Linie getrennt wird (Abb. rechts).

Die Berechnung von $P(K|T)$ erklärt bereits hinreichend, warum man in Deutschland keinen Heimtest erwerben kann, sodass sich in natürlicher Weise die Frage nach dem Vorgehen hierzulande anschließt. Dazu wird der sog. Western-Blot-Test T' analysiert, der im Labor automatisch nach einem positiven Ersttest durchgeführt wird. $P(K|T' \cap T)$ ist erheblich höher als $P(K|T)$, da eine Stichprobe mit 166-facher Prävalenz vorliegt. Hier bietet es sich an, parallel ein Baumdiagramm mit Wahrscheinlichkeiten und die alternative Repräsentation durch das Einheitsquadrat zu verwenden. Die beim Western-Blot-Test angerissene Bedeutung von $P(K)$ wird anhand der Bevölkerungsgruppe der intravenös Heroinabhängigen untersucht; en passant wird dabei die Vierfeldertafel als letzte Repräsentation aufgabengesteuert eingeführt und ihre Verbindung zum Einheitsquadrat beleuchtet. Zudem bietet sich hier die Möglichkeit, im Unterricht den subjektiven Gehalt der Wahrscheinlichkeit anzusprechen, da der Test i.A. nicht ohne vorheriges Infektionsrisiko durchgeführt wird. Der erste Teil der Reihe schließt mit der Umkehrung eines Baumdiagramms ab. Aufgrund des extern festgelegten Klausurtermins muss die Reihe für Selbstdiagnose und Wiederholung unterbrochen werden; um eine faire Leistungsüberprüfung zu gewährleisten, wird der Kontext in der Klausuraufgabe nicht verlassen.

Der Transfer erfolgt über die Beurteilung von Indizien vor Gericht und die Exkursion "Lernen aus Erfahrung" aus dem eingeführten Schulbuch (Brandt et al., S. 164f). Zuletzt wird als Besonderheit aller Beispiele die stochastische Abhängigkeit eingeführt und grundlegenden Situationen gegenübergestellt, in denen Unabhängigkeit gilt.

1.6 Begründung der wesentlichen methodischen Entscheidungen

Der Verlauf des Unterrichts wird zu einem Großteil material mit Anpassungen und Verbesserungen der von Dreibholz (2014) vorgeschlagenen sowie mit eigens entwickelten Arbeitsblättern gesteuert, die von Schülerinnen gemäß dem kooperativen Grundprinzip Think-Pair-Share bearbeitet und diskutiert werden (Brüning und Saum 2009, S. 11 ff). Der Rückgriff auf Hilfekarten ermöglicht es, den Lernprozess möglichst jeden Schülers geeignet zu unterstützen und so eine breite kognitive Aktivierung als psychologische Hauptvoraussetzung erfolgreicher Lernprozesse zu ermöglichen (Gold, S. 53ff). Dabei ermöglicht die Beobachtung der Lern- und Arbeitsprozesse im Sinne der formativen Diagnose "on the fly" (ebd., S. 102f) sowohl die Beratung bei nicht antizipierten Schwierigkeiten als auch eine präzise Anpassung zukünftiger Hilfekarten an die Bedürfnisse der Schüler. Da die in der Reihe auftauchenden Probleme aus mathematischer Sicht nur *einen* sinnvollen Lösungsweg zulassen, wird kein Kompetenzschwerpunkt im Bereich Problemlösen gesetzt. Dies impliziert zugleich, dass der Kontext nicht im Rahmen einer Lernaufgabe i.S.v. Leisen bearbeitet werden sollte, da die für diese Form der Lernumgebung notwendige Stufung und Offenheit der Aufgabenstellungen nicht hergestellt werden kann.

Der eingeführte GTR TI-84 plus bringt im Hinblick auf die angestrebte Kompetenzentwicklung keinen Mehrwert. In der Einheit zum Einfluss der Prävalenz kommt GeoGebra als Multirepräsentationssystem zum Einsatz, mit dem der Einfluss von $P(K)$ auf die Vierfeldertafel und das Einheitsquadrat simultan untersucht sowie mit dem Spurmodus ein Graph der Funktion $P(K) \mapsto P(K|T)$ gezeichnet werden kann.

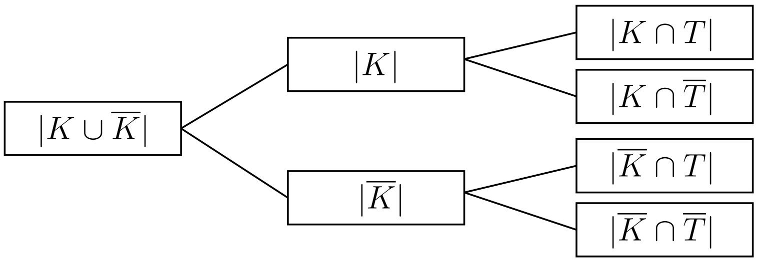
2 Planung der Unterrichtsstunde

2.1 Lernausgangslage

Da es sich um die Einstiegsstunde in die Reihe handelt, bedarf die Analyse der Lernausgangslage aus 1.4 lediglich der Ergänzung, dass die Prüfungsstunde außerhalb der Kursschiene, aber im üblichen Raum stattfindet.

2.2 Sachanalyse

Mit den Zerlegungen $\Omega = K \dot{\cup} \overline{K}$ und $\Omega = T \dot{\cup} \overline{T}$ aus 1.3 ergibt sich für den Test folgendes Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten:



Die Wahrscheinlichkeit, dass die Krankheit vorliegt, wenn der Test positiv ausfällt, ergibt sich zu

$$P(K|T) = \frac{\text{Anzahl der Erkrankten } \textbf{und} \text{ positiv Getesteten}}{\text{Anzahl der positiv Getesteten}} = \frac{|K \cap T|}{|K \cap T| + |\overline{K} \cap T|} \,.$$

2.3 Lernziele

Die Schülerinnen können

- die Realsituation eines medizinischen Tests in ein geeignetes mathematisches Modell (absolute Häufigkeiten in einer Population) übersetzen, im Modell $P(K|T)$ berechnen und auf die Realität zurückbeziehen,
- den Begriff bedingte Wahrscheinlichkeit definieren (Eventualziel),
- $P(K|T)$ unter Verwendung von Wahrscheinlichkeiten berechen (Eventualziel, wird zur Differenzierung genutzt).

In Bezug auf die Kompetenzerwartungen aus 1.2 leistet die Prüfungsstunde einen Beitrag im Bereich Mathematisieren und Validieren, da die Realsituation in ein mathematisches Modell übersetzt wird, in diesem Berechnungen durchgeführt und wieder auf die Realität zurückbezogen werden.

2.4 Didaktische Überlegungen

Auf Grundlage der Ausführungen zur curricularen wie didaktischen Legitimation des Reihenkontexts in 1.5 wird die Unterrichtsstunde mit orientierenden Informationen zur HIV-Problematik begonnen. Bezugnehmend auf die ausgehängten Plakate der BzgA werden daher kurze fachliche Informationen zur Unterscheidung zwischen HIV und AIDS sowie zu aktuellen epidemiologischen Daten für Deutschland gegeben (Robert Koch-Institut, 2015). Ein Großteil der Schülerinnen stammt aus einem Umfeld mit gehobenem sozioökonischem Status und unternimmt regelmäßig Urlaubsreisen, sodass ein höherer Lebensweltbezug erreicht wird, indem ein im Ausland erwerblicher HIV-Test mit seinen Testparametern vorgestellt wird.

Zentral für die allgemeinbildenden Zielsetzungen des gesamten Unterrichtsvorhabens ist die Demonstration, dass Menschen in Bezug auf bedingte Wahrscheinlichkeiten unter "vernebeltem Denken" leiden, obwohl alle aus mathematischer Sicht relevanten Informationen vorliegen, sowie die Bereitstellung von Methoden, um damit verbundene Fehlschlüsse zu verhindern (Gigerenzer 2002, S. 347). Daher muss zu Beginn eine Erwartung "aus dem Bauch heraus" formuliert werden, denn eine Überraschung über die Lösung des vorliegenden Problems kann nur erfolgen, wenn zuvor eine Erwartung formuliert wurde. Anderenfalls bestünde die erhebliche Gefahr eines Rückschaufehlers. Die Überraschung ist zudem ein sicherer Indikator dafür, dass das Ergebnis validiert, d.h. wieder auf die reale Sachsituation bezogen wurde. Um gegenseitige Beeinflussung bei der Schätzung zu vermeiden, sollte die Abfrage im Gegensatz zum Vorschlag von Dreibholz (2014) anonym erfolgen und vom Lehrer während einer Arbeitsphase zügig ausgewertet werden.

Für die Lösung ist die in 1.3 verwendete Partition des Ergebnisraums entscheidend. Dem Autor sind keine belastbaren Erkenntnisse bekannt, ob dies aus Schülerinnensicht evident ist oder ob hieraus typischerweise Lernschwierigkeiten resultieren, sodass ein entsprechender Hinweis in die zur Verfügung stehende Hilfekarte aufgenommen wird.

Die Durchführung des Tests an einer gegebenen Person hat selbst den Charakter eines Zufallsexperiments, da das Ergebnis nicht vollständig durch das Vorliegen der Erkrankung determiniert ist. Die in 1.5 angeführten Befunde belegen zweifelsfrei, dass die Verwendung absoluter Häufigkeiten für ein intuitives Verständnis der Situation entscheidend ist. Eine wesentliche didaktische Reduktion und gleichzeitig zentrale Annahme für das Erstellen des mathematischen Modells ist daher der Übergang zu Erwartungswerten für eine gegebene Population, hier exemplarisch für Deutschland. Diese Studien belegen ebenfalls, dass es auch für vermeintliche Experten nicht naheliegend ist, Wahrscheinlichkeiten auf eine Population zu beziehen und dadurch auf absolute Häufigkeiten umzurechnen, sodass diese Idee den Schülerinnen vorgegeben werden sollte. Vor diesem empirischen Hintergrund, der Dreibholz (2014, S. 3) bekannt war, ist es aus Sicht der Autors widersprüchlich, die Schüler arbeitsteilig mit absoluten Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten arbeiten zu lassen. Die Kurshälfte, die mit Wahrscheinlichkeiten arbeitet, wird in einer vorgegebenen Zeit nicht ohne massive Unterstützung[4] zum Ziel kommen können, was dem Autor motivationspsychologisch in Bezug auf die Selbstbestimmungstheorie von Deci & Ryan (2008) kaum vertretbar erscheint. Vielmehr trägt nach erfolgreicher Arbeit mit dem Häufigkeitszugang die Mitteilung, dass auch Ärztinnen unvorbereitet an dieser Frage scheitern, wesentlich zum Kompetenzerleben der Schüler bei.

Um später die reibungslose Übersetzung der Rechnung in Wahrscheinlichkeiten zu gewährleisten und gleichzeitig den Lernprozess durch einen Wechsel der Darstellungsform zu unterstützen, enthält die Hilfekarte zusätzlich den Hinweis, auf ein Baumdiagramm zurückzugreifen, in dem die Mengenbezeichnungen durch die absoluten Häufigkeiten ersetzt wurden. Als letzter Hinweis wird die Überlegung angeregt, auf welchen Grundwert man sich bei der Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit beziehen muss. Schließlich bietet die Übersetzung der Rechnung in Wahrscheinlichkeiten und für besonders leistungsstarke Schüler eine Herleitung einer entsprechenden Formel geeignete Möglichkeiten zur Differenzierung.

Die Ergebnisse werden anschließend vorgestellt. Hierzu wird das leere Baumdiagramm aus der Hilfekarte zur Verfügung gestellt, damit die zur Lösung führenden gedanklichen Schritte noch einmal explizit benannt und vom Plenum nachvollzogen werden können. Sofern dieser Punkt nicht von den Schülern benannt wird, weist der Lehrer darauf hin, dass bei einer realen Durchführung dieses Tests statistische Schwankungen der Gruppengrößen zu erwarten wären, dass es sich also um eine Modellannahme handelt. Ein Vergleich mit den zuvor erhobenen Einschätzungen des Kurses dürfte die praktische Unmöglichkeit des intuiven Schätzens bedingter Wahrscheinlichkeiten verdeutlichen. Die Reaktion des Kurses auf dieses Ergebnis kann nicht antizipiert werden, aber einem aus der Überraschung resultierenden Diskussionsbedürfnis sollte aufgrund der Authentizität des Kontexts unbedingt nachgegeben werden. Die hiermit potentiell verbundene, intensive Auseinandersetzung mit dem Ergebnis und seinen Implikationen erscheint dem Autor im Hinblick auf das subjektive Erleben der lebenspraktischen Verwertbarkeit mathematischer Modelle wesentlich bildungswirksamer als die Wiederholung der Rechnung mit Wahrscheinlichkeiten oder die Angabe der Definition von bedingten Wahrscheinlichkeiten. Für den Fall, dass die Unterrichtsstunde an dieser Stelle beendet wird, bietet es sich an, dass die Schüler als Hausaufgabe auf der Grundlage ihrer neuen Erkenntnisse für oder gegen die Durchführung eines HIV-Screenings argumentieren[5].

Anderenfalls kann an dieser Stelle der Lehrer den Begriff “bedingte Wahrscheinlichkeit” im Kontext definieren. Die partiell verbale Formulierung von Dreibholz (2014, S.

[4]Dreibholz (2014, S. 11) gibt auf ihrer Hilfekarte die Lösungsschritte explizit vor; zumindest ist aus Sicht des Autors der Hinweis “Berechne den Anteil von ‚HIV-positiv und Testpositiv ’ zu ‚Test positiv”’ nicht anders zu interpretieren.

[5]Dies ist ansonsten für die kommende Unterrichtsstunde geplant.

11)

$$P(\text{Merkmal}|\text{Bedingung}) = \frac{\text{Anzahl der Fälle, die Merkmal und Bedingung erfüllen}}{\text{Anzahl der Fälle, die die Bedingung erfüllen}}$$

erscheint dem Autor dabei für Schülerinnen wesentlich zugänglicher als eine stärker formalisierte. Zuletzt sollte an dieser Stelle noch der Hinweis erfolgen, dass sich $P(K|T)$ von $P(T|K)$ unterscheidet. Die Berechnung von $P(K|T)$ und $P(K|\overline{T})$ für den in Deutschland eingesetzten ELISA-Test ist dann eine geeignete Hausaufgabe zur Einübung des Verfahrens. Sofern die Bearbeitung des zentralen Auftrags wesentlich schneller erfolgen sollte als erwartet, so kann diese Aufgabe auch sinnstiftend zum Einüben des Verfahrens während der Unterrichtsstunde genutzt werden.

2.5 Begründung der wesentlichen methodischen Entscheidungen

Die kognitionspsychologischen Ausführungen in der didaktischen Analyse implizieren, dass die Anwendung des problemorientierten Unterrichtsverfahrens nicht zielführend wäre, da die Schülerinnen weder die Problemfrage selbst entwickeln noch ein geeignetes Verfahren zur Lösung vorschlagen könnten, sodass phasenweise aufgrund eines nicht geeignet eingestellten Anforderungsniveaus mit einer niedrigen Schüleraktivierung zu rechnen wäre. Aus diesen Gründen wird auch auf den Einsatz des prinzipiell verfügbaren Beipackzettels verzichtet, da die Schüler aufgrund mangelnder Vorkenntnisse hieraus mit einem annehmbaren Zeitaufwand keine aus ihrer Sicht sinnvollen Informationen extrahieren könnten, zumal die Zielsetzung zu diesem Zeitpunkt noch gar nicht klar wäre. Der Weg von der Packungsbeilage zur Problemfrage ist auch insofern verstellt, als dass die Schüler wohl auf sich selbst bezogen nicht auf die Idee kämen, von einem positiven Testergebnis auszugehen.

Die Stunde beginnt daher mit einem informierenden Einstieg in die HIV-Problematik durch einen kurzen Lehrervortrag, weil auf diese Weise die wesentlichen Informationen inkl. Problemfrage konzis benannt werden können. Die Frage wird bewusst unpersönlich formuliert, da die Bearbeitung nicht unmittelbar durch die Diskussion subjektiver Wahrscheinlichkeit komplizierter werden soll.

Der Autor hat kein Exemplar des HIV-Heimtests importiert, da hiervon im Vergleich zu einer Abbildung keine größere Realitätsnähe zu erwarten wäre. Weil zusätzlich aktuelle epidemiologische Daten des Robert-Koch-Instituts (RKI) und eines der Plakate der BzgA verwendet werden, bietet sich als Informationsträger eine digitale Präsentation an.

Die Erarbeitung könnte fragend-entwickelnd gestaltet werden, allerdings ist hierdurch weder eine breite kognitive Aktivierung noch eine geeignete Einstellung des Anspruchsniveaus für große Teile des Kurses zu erreichen. Eine arbeitsteilige Sozialform scheidet aus: Wenn den kognitionspsychologischen Erkenntnissen entsprochen würde, so könnte eine Arbeitsteilung sinnvoll nur durch die Berechnung von $P(K|T)$ und $P(K|\overline{T})$ erreicht werden. Die zweite Berechnung ergibt allerdings kein überraschendes Ergebnis und wird daher aus motivationalen Gründen abgelehnt. Eine Arbeitsteilung über absolute Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten wurde bereits verworfen, sodass eine aufgabengesteuerte Erarbeitung mit einem geeigneten Unterstützungssystem das Mittel der Wahl ist. Der Grundform think-pair-share des kooperativen Lernens entsprechend soll sich zunächst jeder eigenständig mit der Aufgabe auseinandersetzen, bevor er sich anschließend mit dem Partner über seine bisherigen Ideen austauscht und die Aufgabe gemeinsam beendet (Brüning und Saum 2009, S. 11ff). Verbindlichkeit wird hergestellt, indem explizit gefordert wird, dass man sich auf eine Präsentation der Ergebnisse vorzubereiten habe. Dem Prinzip der minimalen Hilfe folgend gibt die Hilfekarte nur Anregungen in Frageform, aber keine expliziten Lösungsschritte vor. Sofern es zu nicht antizipierbaren Problemen kommt, kann der Lehrer in dieser Phase auch unterstützend eingreifen.

Die Ergebnisse können effizient mit Hilfe des Activboards präsentiert werden, indem ein bereits vorgefertigtes Baumdiagramm ausgefüllt wird. So kann unmittelbar nach Beendigung dieser Phase das Ergebnis der Schätzung des Kurses eingeblendet werden, die während der Arbeitsphase vom Lehrer als Histogramm vorbereitet wurde.

Sofern es in der Stunde zur Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit kommt, so wird diese vom Lehrer an der Tafel notiert und erklärt. Die Definition könnte sukzessive in einer digitalen Präsentation aufgedeckt und erläutert werden, jedoch verleitet dies den Autor mitunter zu einem zu zügigen Vorgehen, sodass hiervon abgesehen wird.

3 Verlaufsplan

Phase	**Lernschritt/Unterrichtsinhalt** (Impulse, Schlüsselfragen, geplantes Lehrerverhalten, erwartetes Schülerverhalten)	**Lernorganisation** (Sozial-/Aktionsformen, Medien)
Begrüßung	L begrüßt den Kurs und stellt den Besuch vor	
Einstieg	L erläutert Informationen zum HIV-Kontext: Bezug zur Sozial-AG, Prävalenz, Vorstellung eines Heimtests mit Parametern	LV; Beamer
	L: “Stellt euch nun vor, eine Person aus Deutschland kauft diesen Test und führt ihn durch. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Person tatsächlich krank, wenn der Test positiv ist?”	LV
	S notieren ihre Schätzung auf einem Zettel, L sammelt diese ein	EA
Erarbeitung	L: “In der Realität sollte man sich bei so wichtigen Fragen natürlich nicht nur auf sein Bauchgefühl verlassen. Ziel der heutigen Stunde ist es daher, diese Wahrscheinlichkeit auch berechnen zu können. Lest dazu bitte das Arbeitsblatt.”	LV
	S lesen	EA; AB
	S paraphrasieren den Auftrag, stellen ggf. Fragen	SV/UG
	L beantwortet ggf. Fragen, weist nochmals auf Sinn der Sozialform, die Hilfekarte und die Differenzierungsaufgaben hin	LV
	S bearbeiten das AB kooperativ, bereiten sich auf Präsentation vor (5min EA, dann PA)	EA/PA; AB
	L fertigt ein Histogramm der Schätzwerte an, unterstützt danach bei Bedarf die Arbeitsphase	
Sicherung	S stellen schrittweise ihre Rechnung vor, beantworten Fragen des Kurses, L unterstützt ggf.	SV/UG; Activboard
	L beglückwünscht die Schüler, da sie selbsttätig eine Rechnung durchgeführt haben, die auch Experten erwiesenermaßen schwerfällt	LV
	L weist auf den Modellcharakter hin: bei einer realen Durchführung gäbe es Schwankungen um diese Erwartungswerte	LV
	L blendet die Schätzung des Kurses ein	
	Alternative 1: Hoher Diskussionsbedarf	
	L moderiert eine Diskussion, geht ggf. situationsadäquat auf Rückfragen der Schülerinnen ein	UG
	möglich: “Wieso liegt man intuitiv so falsch?”, “Soll man so einen Test überhaupt durchführen?”, “Was bedeutet das Testergebnis tatsächlich für die Erkrankungswahrscheinlichkeit?”	
	Mögliches Stundenende mit HA: Pro oder contra HIV-Screening mit diesem Test argumentieren	
	Alternative 2: Kein oder geringer Diskussionsbedarf	
	L weist darauf hin, dass die subjektive Wahrscheinlichkeit nun zwar gestiegen sein mag, aber die Interpretation immer noch von den sonstigen Voraussetzungen, wie z.B. dem Infektionsweg, abhängt	LV
	L gibt die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit und weist auf $P(K\|T) \neq P(T\|K)$ hin	LV; Tafel
	Stundenende mit HA: Rechnung für ELISA-Test wiederholen, außerdem $P(K\|\overline{T})$ berechnen **Alternative:** Falls noch ausreichend Zeit verfügbar ist, kann die Aufgabe auch in der Stunde schon sinnstiftend zum Einüben und Behalten verwendet werden	

4 Literatur

Brandt, D. et al. (2014). *Lambacher Schweizer. Mathematik. Einführungsphase. Nordrhein-Westfalen* (1.Aufl.). Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Brüning, L. & Saum, T. (2009). *Erfolgreich unterrichten durch Kooperatives Lernen. Strategien zur Schüleraktivierung. Band 1* (5. Aufl.). Essen: Verlag Neue Deutsche Schule.

Deci, E.L. & Ryan, R.M. (2008). Self-Determination Theory: A Macrotheory of Human Motivation, Development, and Health. *Canadian Psychology 49, 182–185.*

Dreibholz, S. (2014). *Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten.* Von der Website http://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe/mathematik/hinweise-und-beispiele/hinweise-und-beispiele.html, abgerufen am 30.03.2016.

Eichler, A. & Vogel, M. (2013). *Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispiel zur Didaktik der Stochastik* (2. Aufl.). Wiesbaden: Springer Verlag.

Gigerenzer, G. (2014). *Das Einmaleins der Skepsis. Über den richtigen Umgang mit Zahlen und Risiken* (14. Aufl.). Berlin: Berlin Verlag.

Gigerenzer, G. (2007). *Qualität der Gesundheitsinformationen für Bürger und Patienten.* Von der Website https://www.iqwig.de/download/07-11-23_Gerd_Gigerenzer.pdf, abgerufen am 23.01.2017.

Gold, A. (2015). *Guter Unterricht. Was wir wirklich darüber wissen* (1. Aufl.). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Kaiser, G. (2015). Werner Blum und sein Beitrag zum Lehren und Lernen mathematischen Modellierens. In Kaiser, G. & Henn, H.W. (Hrsg.), *Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Mathematikunterricht* (S. 1 – 25). Wiesbaden: Springer Verlag.

Leisen, J. *Lernaufgaben als Lernumgebung zur Steuerung von Lernprozessen.* Von der Website http://www.josefleisen.de/uploads2/02%20Der%20Kompetenzfermenter%20-%20Ein%20Lehr-Lern-Modell/04%20Lernaufgaben%20als%20Lernumgebung%20zur%20Steuerung%20von%20Lernprozessen.pdf, abgerufen am 05.01.2017.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.). *Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik.*

Nothbaum, N. & Steins, G. (2010): Nicht sexistischer Sprachgebrauch: die stochastische Genuswahl. In Steins, G. (Hrsg.): *Handbuch Psychologie und Geschlechterforschung.* Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften.

Robert Koch-Institut (2015). *HIV/AIDS in Deutschland – Eckdaten einer Schätzung. Epidemiologische Kurzinformation des Robert-Koch-Instituts. Stand: Ende 2015.*

Wisniewski, B. (2013). *Psychologie für die Lehrerbildung* (1. Aufl.). Bad Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt.

5 Erklärung

Ich versichere, dass ich die Schriftliche Arbeit eigenständig verfasst, keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt und die Stellen der Schriftlichen Arbeit, die anderen Werken dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen sind, in jedem einzelnen Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe. Das Gleiche gilt auch für beigegebene Zeichnungen, Kartenskizzen und Darstellungen. Anfang und Ende von wörtlichen Textübernahmen habe ich durch An- und Abführungszeichen, sinngemäße Übernahmen durch direkten Verweis auf die Verfasserin oder den Verfasser gekennzeichnet.

Ort, Datum   Unterschrift

Anhang

- Folien für die Bildschirmpräsentation
- Mögliche Schülerlösungen
- Tafelbild zur Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit
- Arbeitsaufträge

Quelle: Bundeszentrale für gesundheitliche Aufklärung

HIV

menschliches Immunschwäche-Virus

AIDS

erworbenes Immunschwäche-Syndrom

ROBERT KOCH INSTITUT

HIV/AIDS in Deutschland – Eckdaten der Schätzung*

Epidemiologische Kurzinformation des Robert Koch-Instituts
Stand: Ende 2015

Geschätzte Zahl der Menschen, die Ende 2015 mit HIV/AIDS in Deutschland leben

	insgesamt	mit HIV-Diagnose	ohne HIV-Diagnose
Gesamtzahl	**> 84.700 (78.300 – 91.100)**	**72.000 (67.000 – 77.900)**	**> 12.600 (11.300 – 14.100)**
Männer	> 69.500 (64.500 – 74.600)	58.800 (54.800 – 63.500)	> 10.500 (9.400 – 11.900)
Frauen	> 15.200 (13.900 – 16.800)	13.200 (12.000 – 14.500)	> 2.100 (1.700 – 2.400)

Etwa 0,1% der deutschen Bevölkerung sind mit HIV infiziert.

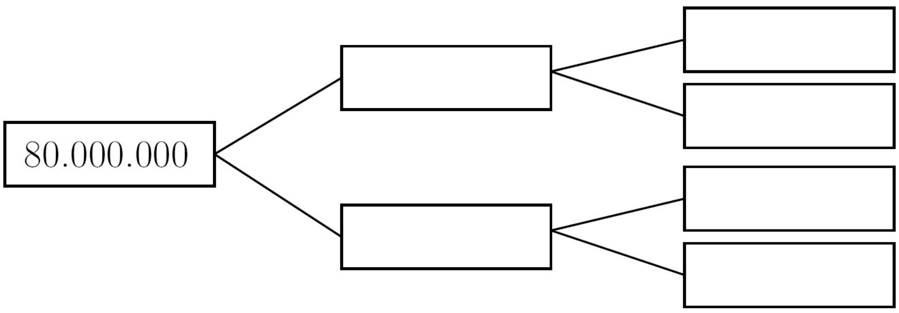
HIV-Test aus der (französischen) Apotheke

Quelle:
http://www.farmaciacanfora.com/en/electromedical/diagnostic/mylan-autotest-vih-hiv-screening/35981.html

Testdaten:

- Wenn man HIV-infiziert ist, dann ist der Test zu 99,1% positiv.
- Wenn man nicht HIV-infiziert ist, dann ist der Test zu 99,5% negativ.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist man HIV-infiziert, wenn der Test positiv ist?



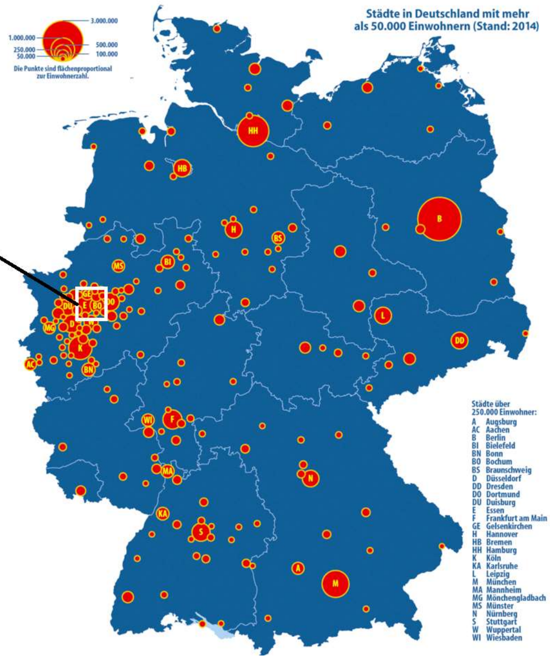
Wahrscheinlichkeit, dass man HIV-positiv ist, **wenn** der Test positiv ist:

p(HIV+ | Test+) =

Schätzung des Kurses

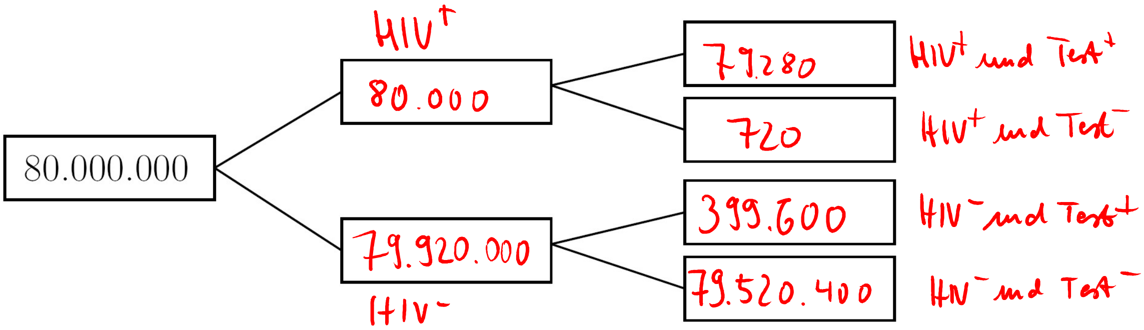
[WIRD HIER EINGEFÜGT]

Quelle: google maps



Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Karte_Deutschland_St%C3%A4dte_%C3%BCber_50000_Einwohner.png

Mögliche Schülerlösung am Activboard



Wahrscheinlichkeit, dass man HIV-positiv ist, **wenn** der Test positiv ist:

$$p(HIV+ \mid Test+) = \frac{\text{Anzahl } HIV^{+} \text{ und } Test^{+}}{\text{Anzahl } Test^{+}} = \frac{79.280}{79.280 + 399.600} = 16{,}6\,\%$$

Tafelbild zur Definition

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die bedingte Wahrscheinlichkeit bezieht sich nicht auf die Gesamtzahl, sondern nur auf die Fälle, die eine bestimmte Bedingung bereits erfüllen:

$$\text{P(Merkmal|Bedingung)} = \frac{Anzahl\ der\ Fälle, die\ Merkmal\ UND\ Bedinung\ erfüllen}{Anzahl\ der\ Fälle, die\ die\ Bedingung\ erfüllen}$$

z.B.:

$$\text{P(HIV+|Test+)} = \frac{Anzahl\ der\ Fälle\ mit\ HIV + UND\ Test +}{Anzahl\ der\ Fälle\ mit\ Test +}$$

In Frankreich und anderen Ländern kann jeder einen HIV-Test in der Apotheke kaufen. In der Packungsbeilage stehen folgende Informationen:

- Wenn man infiziert ist, dann fällt der Test zu 99,1% positiv aus (Sensitivität).
- Wenn man nicht infiziert ist, dann fällt der Test zu 99,5% negativ aus (Spezifität).

Laut Robert-Koch-Institut sind in Deutschland 0,1% der Bevölkerung mit HIV infiziert.

Wie groß ist für einen Menschen aus Deutschland die Wahrscheinlichkeit, dass er tatsächlich infiziert ist, wenn der Test positiv ausfällt?

Arbeite zunächst 5 Minuten lang allein, danach kannst du dich mit deinem Partner austauschen. Reflektiert anschließend gemeinsam euer Vorgehen und bereitet euch darauf vor, dem Kurs euer Ergebnis zu präsentieren. Ihr könnt gerne darauf eingehen, wieso das Ergebnis ggf. von eurer Schätzung abweicht.

Mit folgendem *Tipp* gelingt die Lösung sicher: Gehe von der Situation aus, dass *alle* 80.000.000 Bundesbürger auf HIV getestet wurden.

Weitere Hilfen findest du bei Bedarf auf der Rückseite.

In Frankreich und anderen Ländern kann jeder einen HIV-Test in der Apotheke kaufen. In der Packungsbeilage stehen folgende Informationen:

- Wenn man infiziert ist, dann fällt der Test zu 99,1% positiv aus (Sensitivität).
- Wenn man nicht infiziert ist, dann fällt der Test zu 99,5% negativ aus (Spezifität).

Laut Robert-Koch-Institut sind in Deutschland 0,1% der Bevölkerung mit HIV infiziert.

Wie groß ist für einen Menschen aus Deutschland die Wahrscheinlichkeit, dass er tatsächlich infiziert ist, wenn der Test positiv ausfällt?

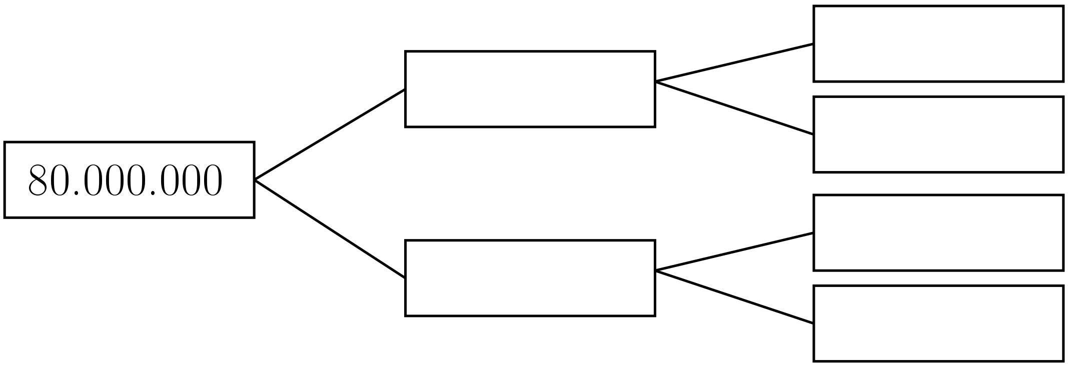
Arbeite zunächst 5 Minuten lang allein, danach kannst du dich mit deinem Partner austauschen. Reflektiert anschließend gemeinsam euer Vorgehen und bereitet euch darauf vor, dem Kurs euer Ergebnis zu präsentieren. Ihr könnt gerne darauf eingehen, wieso das Ergebnis ggf. von eurer Schätzung abweicht.

Mit folgendem *Tipp* gelingt die Lösung sicher: Gehe von der Situation aus, dass *alle* 80.000.000 Bundesbürger auf HIV getestet wurden.

Weitere Hilfen findest du bei Bedarf auf der Rückseite.

Hilfen:

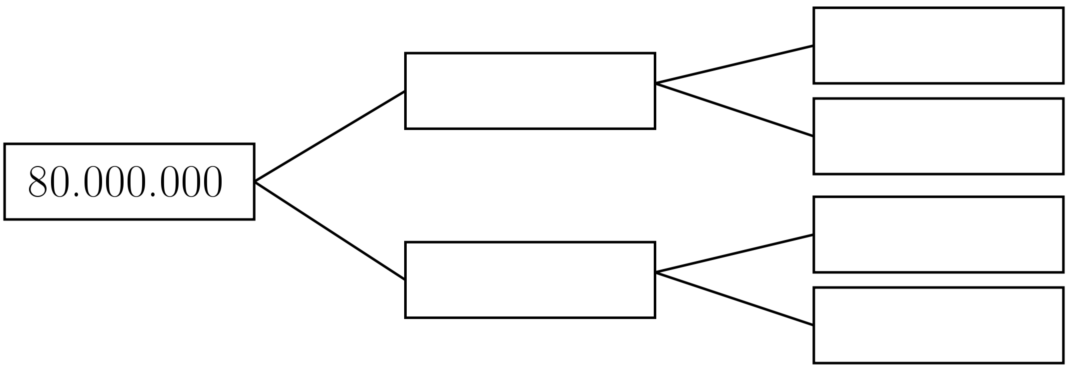
- Vor dem Test zerfällt die Bevölkerung in zwei Gruppen: Infizierte und Nicht-Infizierte. Welche vier verschiedenen Gruppen gibt es *nach* dem Test?
- Wie viele Menschen gehören jeweils zu den Gruppen? Erstelle ein Baumdiagramm, in das du diese absoluten Häufigkeiten einträgst. Überlege, welche Eigenschaft sinnvollerweise auf der ersten Stufe steht.



- Berechne nun die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Überlege dazu, auf welchen Grundwert du dich beziehen musst.

Hilfen:

- Vor dem Test zerfällt die Bevölkerung in zwei Gruppen: Infizierte und Nicht-Infizierte. Welche vier verschiedenen Gruppen gibt es *nach* dem Test?
- Wie viele Menschen gehören jeweils zu den Gruppen? Erstelle ein Baumdiagramm, in das du diese absoluten Häufigkeiten einträgst. Überlege, welche Eigenschaft sinnvollerweise auf der ersten Stufe steht.



- Berechne nun die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Überlege dazu, auf welchen Grundwert du dich beziehen musst.

Wenn du schon fertig bist:

- Ergänze das Baumdiagramm aus der vorherigen Aufgabe um Wahrscheinlichkeiten und wiederhole die Rechnung mit Wahrscheinlichkeiten.
- Man schreibt $p(\text{HIV}^+|\text{Test}^+)$ für die Wahrscheinlichkeit, dass die getestete Person mit HIV infiziert ist, *wenn* der Test positiv ist. Kannst du eine Formel angeben, mit deren Hilfe man diese Wahrscheinlichkeit mit den Wahrscheinlichkeiten aus dem Baumdiagramm berechnen kann? Die Wahrscheinlichkeiten für welche Ereignisse stehen in dieser Formel im Zähler und im Nenner?

Wenn du schon fertig bist:

- Ergänze das Baumdiagramm aus der vorherigen Aufgabe um Wahrscheinlichkeiten und wiederhole die Rechnung mit Wahrscheinlichkeiten.
- Man schreibt $p(\text{HIV}^+|\text{Test}^+)$ für die Wahrscheinlichkeit, dass die getestete Person mit HIV infiziert ist, *wenn* der Test positiv ist. Kannst du eine Formel angeben, mit deren Hilfe man diese Wahrscheinlichkeit mit den Wahrscheinlichkeiten aus dem Baumdiagramm berechnen kann? Die Wahrscheinlichkeiten für welche Ereignisse stehen in dieser Formel im Zähler und im Nenner?

Hausaufgabe:
In Deutschland kann man keine HIV-Heimtests kaufen. Zu untersuchende Blutproben werden in ein Labor geschickt und zunächst mit dem sog. ELISA-Test untersucht. Für diesen Test gilt:

- $p(\text{Test}^+|\text{HIV}^+) = 99,9\%$ (Sensitivität).
- $p(\text{Test}^-|\text{HIV}^-) = 99,7\%$ (Sensitivität).

Berechne für diesen Test die Wahrscheinlichkeiten $p(\text{HIV}^+|\text{Test}^+)$ und $p(\text{HIV}^-|\text{Test}^-)$.

Hausaufgabe:
In Deutschland kann man keine HIV-Heimtests kaufen. Zu untersuchende Blutproben werden in ein Labor geschickt und zunächst mit dem sog. ELISA-Test untersucht. Für diesen Test gilt:

- $p(\text{Test}^+|\text{HIV}^+) = 99,9\%$ (Sensitivität).
- $p(\text{Test}^-|\text{HIV}^-) = 99,7\%$ (Sensitivität).

Berechne für diesen Test die Wahrscheinlichkeiten $p(\text{HIV}^+|\text{Test}^+)$ und $p(\text{HIV}^-|\text{Test}^-)$.