Zentrum für schulpraktische Lehrerausbildung Leverkusen
Seminar für das Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen
Brückenstr. 10-12 — 51379 Leverkusen

Unterrichtsentwurf für den 5. Unterrichtsbesuch im Fach Mathematik

Studienreferendar:	Dr. Daniel J. Wieczorek
Ausbildungsschule:	Freiherr-vom-Stein-Gymnasium Leverkusen
Datum:	Dienstag, 06.12.2016
Zeit:	2. Stunde (8:55 - 9:45 Uhr)
Lerngruppe:	EF (x Schülerinnen, y Schüler)
Unterricht seit:	26.08.2016
Raum:	
Fachseminarleiter:	
Kernseminarleiterin:	
Ausbildungsbeauftragter:	
Schulleiter:	

Thema der Unterrichtsreihe:	Wann erreicht Usain Bolz seine Höchstgeschwindigkeit? Kontextorientierte Einführung in die Differentialrechnung am Beispiel des Weltrekordlaufs von Usain Bolt.
Thema der heutigen Stunde:	Wie kann man die Ableitung an einer beliebigen Stelle berechnen? Aufgabengesteuerte Einführung der Ableitungsfunktion.
Hausaufgabe zur heutigen Stunde:	keine
eingeführtes Lehrbuch:	LS Mathematik Einführungsphase

Inhaltsverzeichnis

1 Aufbau des Unterrichtsvorhabens **3**

2 Lernziele und Kompetenzen **4**

3 Didaktisch-methodische Überlegungen **4**

3.1 Sachanalyse 4

3.2 Lernvoraussetzungen und Lernausgangslage 5

3.3 Didaktische Überlegungen 6

3.4 Begründung der wesentlichen methodischen Entscheidungen 9

4 Verlaufsplan **10**

5 Literatur **11**

6 Erklärung **11**

1 Aufbau des Unterrichtsvorhabens

Datum	Thema	Kompetenzzuwachs
15.11.2016	Wie beschreibt man Usain Bolts Weltrekordlauf?	t-s-Diagramme zeichnen und beschreiben können, geeignete Ansätze für ganzrationale Regressionsfunktionen begründen können
18.11.2016	Wann erreicht Bolt seine höchste Geschwindigkeit?	Den Geschwindigkeitsverlauf anhand eines t-s-Diagramms qualitativ beschreiben können, t-s-Diagramme mit der Tangentenfunktion des GTR heuristisch untersuchen können
22.11.2016	Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreicht Bolt?	Durchschnittsgeschwindigkeit, durchschnittliche Änderungsrate, Sekantensteigung berechnen und erläutern können
25.11.2016	Was ist der Unterschied zwischen Durchschnitts- und Momentangeschwindigkeit?	Momentangeschwindigkeit in Sachzusammenhängen erläutern und von der Durchschnittsgeschwindigkeit abgrenzen können
29.11.2016	Wie kann man Bolts Momentangeschwindigkeit näherungsweise berechnen?	Momentangeschwindigkeit numerisch aus Durchschnittsgeschwindigkeiten approximieren und das Verfahren erläutern können
02.12.2016	Wie kann man eine Momentangeschwindigkeit exakt berechnen?	Die “h-Methode” erläutern und anwenden können
06.12.2016	Übungsstunde Wie kann man die Ableitung an einer beliebigen Stelle berechnen?	Die “h-Methode” anwenden können Ableitungsfunktion erläutern und für eine ganzrationale Funktion berechnen können
09.12.2016	Wie kann man die Ableitung einer Potenzfunktion berechnen?	Potenzregel anwenden können
13.12.2016	Wie kann man die Ableitung einer ganzrationalen Funktion berechnen? Wiederholung	Linearität der Ableitung anwenden können
16.12.2016	Wiederholung	
20.12.2016	Klausur	

2 Lernziele und Kompetenzen

Durch das gewählte Lernarrangement soll als Stundenziel erreicht werden, dass die Schülerinnen und Schüler[1]

- den Begriff Ableitungsfunktion erläutern und den Term der Ableitungsfunktion einer ganzrationalen Funktion mit Hilfe des Differenzenquotienten berechnen können.

3 Didaktisch-methodische Überlegungen

3.1 Sachanalyse

Der Funktionsbegriff ist mit drei Grundvorstellungen verbunden: der Zuordnungs-, der Kovariations- und der Objektvorstellung [**1**]. Die Unterrichtsreihe zur Differentialrechnung bietet die Möglichkeit, alle drei anzusprechen bzw. zu vertiefen. Eine auf einem offenen Intervall I definierte Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ für $h \to 0$ existiert.

$$f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

heißt Ableitung von f an der Stelle x_0 und gibt geometrisch die Steigung der Tangente an G_f in $(x_0|f(x_0))$ an. In Sachzusammenhängen wird $f'(x_0)$ als momentane Änderungsrate der Größe $f(x)$ in Abhängigkeit von der Größe x aufgefasst (Kovariationsvorstellung für f).
Ist f für jedes $x_0 \in I$ differenzierbar, so heißt f schlechthin differenzierbar und die Abbildung $x_0 \mapsto f'(x_0)$ definiert die sog. Ableitungsfunktion f' von f (Zuordnungsvorstellung für f'). Aus der Definition des Differenzenquotienten und den Rechenregeln für Grenzwerte folgt, dass $f \mapsto f'$ ein linearer Operator ist (Objektvorstellung für f und f' und gleichzeitig Zuordnungsvorstellung für den Operator). Zusammen mit der Rechnung

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} = n x^{n-1}$$

folgt dann die Ableitungsregel für ganzrationale Funktionen:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right)' = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(x^k \right)' = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \ .$$

[1] Im folgenden Text wird zur besseren Lesbarkeit nur die Formulierung “Schüler” verwendet; es sind jedoch stets sämtliche Geschlechter gemeint.

3.2 Lernvoraussetzungen und Lernausgangslage

Zur Erreichung der Lernziele müssen die Schüler

- die binomische Formel und das Distributivgesetz anwenden sowie Brüche kürzen können,
- die "h-Methode" zur Berechnung der Ableitung an vorgegebenen Stellen anwenden können.

Der Autor unterrichtet den Kurs seit Schuljahresbeginn selbstständig. Die Leistungsspanne war zunächst recht groß, da einige Schüler zu Beginn massive Schwierigkeiten mit den algebraischen Aspekten des Mittelstufenstoffs, etwa dem rechnerischen Umgang mit linearen und quadratischen Funktionen, hatten. Die Ergebnisse der ersten Klausur (nur eine nicht-ausreichende Leistung) stimmen hier recht hoffnungsvoll; seither ist auch bei Schülern, die teilweise im ersten Quartal die Mitarbeit im Unterricht verweigert haben, freiwillige Beteiligung zu verzeichnen. Nichtsdestotrotz muss aus Sicht des Autors gerade das algebraische "Handwerkszeug" bei vielen Kursmitgliedern wachgehalten und ausgebaut werden. Ein Diagnosetest, eine schriftliche Übung und häufige Rückfragen des Lehrers im Unterricht zeigen, dass die meisten Kursteilnehmer die Grundvorstellung, dass Funktionen Größen einander zuordnen, noch nicht gut verinnerlicht haben. Vielmehr dominiert bei vielen die Vorstellung, dass Funktionen primär zur Beschreibung bzw. "Berechnung" von Graphen dienen[2]. Auf der anderen Seite gibt es drei insgesamt sehr gute Schülerinnen und Schüler, von denen eine heraussticht und sich nach Erledigung der Standardaufgaben mit über den Unterricht hinausgehem Zusatzmaterial beschäftigten darf.
Vier Schülerinnen waren in der Stunde, in der die "h-Methode" eingeführt wurde, aufgrund eines Ausflugs mit Austauschschülern abwesend (02.12.2016). Dies dürfte nach Einschätzung des Autors nicht zu wesentlichen Schwierigkeiten führen, da der Unterrichtsbesuch in der zweiten Hälfte einer Doppelstunde stattfindet. Die erste Hälfte dient der Besprechung der Hausaufgabe ($f(x) = -0.1x^2 + 2x,\ f'(3)$ berechnen), außerdem ist die Besuchsstunde so konzipiert, dass die erneute Anwendung der h-Methode für eine konkrete Stelle eine immanente Wiederholung des Funktionsbegriffs erlaubt und die abstraktere Rechnung für eine allgemeine Stelle zur Bestimmung der Ableitungsfunktion vorentlastet, sodass auch hier noch weitere Übungsgelegenheit besteht.

[2] Einige Beispiele aus dem Test: "Eine Funktion ist eine Formel, durch die man bestimmte Parabeln durch rechnen raus bekommt", "Mit einer Funktion berechnet man verschiedene Dinge z.B. Steigungen oder Punkte eines Graphen. z.B. $f(x) = mx + b \leftarrow$ für die Buchstaben setzt man nun verschiedene Zahlen ein.", "Eine Funktion benutzt man, um eine Variable 'herauszufinden'.", "Eine Funktion ist eine Formel zum berechnen von Geraden in Graphen."

3.3 Didaktische Überlegungen

Die Behandlung des Themas ist unmittelbar durch die Kompetenzerwartung "Änderungsraten funktional [beschreiben und interpretieren können]" des Kernlehrplans legitimiert [**2**]. Ein Gegenwartsbezug wird durch die Orientierung der Reihe am sinnstiftenden Kontext von Usain Bolts Weltrekordsprint erreicht; das übergreifende Ziel der Reihe ist es, anhand eines aus Zwischenzeiten durch Regression gewonnenen Zeit-Weg-Gesetzes den Zeitpunkt zu bestimmen, an dem Bolt seine Höchstgeschwindigkeit erreicht. Aufgrund der nicht zu überschätzenden Bedeutung der Infinitesimalrechnung für den immensen wissenschaftlichen und gesellschaftlichen Fortschritt seit den Zeiten Newtons und Leibniz' begleitet dieses Thema die Schüler nicht nur in der Oberstufe, sondern wird zukünftig auch im Studium und Beruf für alle Bereiche relevant bleiben, die Mathematik als Bezugswissenschaft nutzen.

Die Stunde beginnt mit einer Wiederholung der wesentlichen Ergebnisse der bisherigen Stunden: der Übergang von der durchschnittlichen zur Momentangeschwindigkeit erlaubt es mathematisch, Bolts Bewegungszustand zu einem bestimmten Zeitpunkt zu charakterisieren, die Berechnung erfolgt mit der "h-Methode". Die Analyse der Lernausgangslage zeigt, dass der Großteil der Schüler noch über kein integriertes oder gar formales Verständnis des Funktionsbegriffs verfügt, sodass die folgende Argumentation beleuchtet, inwiefern diese Stunde einen Beitrag zur Begriffsausschärfung leisten kann. Es sind zwei mögliche Unterrichtsgänge denkbar, die sich in einem Spannungsfeld zwischen höherer Transparenz und höherer Wahrscheinlichkeit des Erreichens der gesetzten Ziele für möglichst alle Schüler befinden: Die Leitfrage nach dem Zeitpunkt, an dem Bolt seine Maximalgeschwindigkeit erreicht, kann an dieser Stelle nahtlos auf die Frage führen, wie groß die Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt ist. Wird diese Frage jedoch unmittelbar durch Umformung des Differenzenquotienten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ bearbeitet, so könnte aus Schülersicht der Fokus der Stunde ausschließlich auf der Durchführung einer für sie anspruchsvollen Rechnung liegen. Das Ergebnis liegt dann algebraisch als Term vor, der die zu untersuchende Stelle x enthält. Neben der angesichts der Lernausgangslage zu erwartenden Schwierigkeiten bei der Rechnung wird die Grundvorstellung des Zuordnens einer Größe zu einer anderen hier nicht sehr deutlich akzentuiert bzw. trotz der vorherigen Erwähnung durch mögliche Schwierigkeiten bei der Rechnung überdeckt. Die Zuordnungsvorstellung ist aus Sicht der Autors entscheidend für ein tieferes Verständnis des Begriffs Ableitungs*funktion*, da sie insbesondere der algebraischen Bestimmung von charakteristischen Stellen zugrundeliegt[3]. Die direk-

[3]Die Kovarationsvorstellung liefert eine heuristische Begründung für das notwendige Kriterium, die Objektvorstellung ist für die algebraische Bestimmung nicht relevant - letztlich geht es bei den Rechnungen immer um die Frage, welchen x-Werten ein verschwindender Wert der Ableitung zugeordnet wird.

te Fokussierung auf die allgemeine Rechnung wäre angesichts der unmittelbar im Anschluss behandelten Ableitungsregeln umso problematischer, als dass diese das Ergebnis der Rechnung kalkülhaft reproduzieren, ohne dabei den funktionalen Zusammenhang zu betonen oder dessen Bedeutung herauszustellen. Aus der empirischen Forschung ist sogar bekannt, dass Schüler die Ableitungsregeln teilweise sogar nur als System zur Benennung von Kurven verstehen – "$2x$" ist dieser Sichtweise nach nur noch der Name der Gerade, die durch "Ableiten der Parabel mit Namen x^2" entsteht, wodurch der Aspekt der Zuordnung verdeckt wird und auch die Objektvorstellung keine Rolle mehr spielt[**3**].
Stattdessen soll eine alternative Herangehensweise zum Zuge kommen, die den Aspekt der Zuordnung stärker betont und Schwierigkeiten bei der allgemeinen Rechnung zumindest abfedert: Die Lerngruppe berechnet zunächst arbeitsteilig die Werte der Ableitung der Modellfunktion an einigen Stellen explizit als Grenzwert des Differenzenquotienten. Auf diese Weise treten die möglichen Probleme mit der algebraischen Manipulation getrennt von der Schwierigkeit des gleichzeitigen Umgangs mit zwei Variablen auf. Die Ergebnisse dieser Rechnung können durch die Tangentenfunktion des GTR selbstständig überprüft werden. Als Tipp wird zusätzlich angegeben, wie man $(x_0 + h)^3$ auflöst, weil der binomische Lehrsatz den Schülern nicht bekannt ist. Durch Zusammenführung der Werte im Plenum und Erstellen eines entsprechenden Punkt-Plots entsteht vor den Augen des Kurses nicht nur eine Diskretisierung des Graphen der Ableitung, sondern es erfolgt auch aktiv die Zuordnung der Ableitungswerte zu den entsprechenden Stellen. Aus dem Plot ergibt sich zwanglos die Vermutung, dass diese Punkte auf einer Parabel liegen, d.h. dass die Abhängigkeit der Ableitungswerte von der Stelle durch eine quadratische Funktion beschrieben werden kann. Je nach Bedürfnis des Kurses könnte an dieser Stelle auch ein quadratischer Fit zur Bestätigung herangezogen werden; unabhängig hiervon schließt jedoch nahtlos die Frage an, inwiefern man einen bzw. diesen Funktionsterm mit Hilfe der Ursprungsfunktion finden kann. Da es nur eine mögliche Antwort gibt[4], kann für das Folgende nicht von Lösen eines Problems im Sinne von Polya gesprochen werden [**4**]; den Schülern wird an dieser Stelle daher lediglich die Möglichkeit eingeräumt, einen Vorschlag zur Lösung zu äußern, ohne dies jedoch zu forcieren. Nur wenige Schüler werden mutmaßlich den korrekten Zugang selbstständig entwickeln und benennen können, sodass der Autor eine Arbeitsphase zur Entwicklung dieses Vorschlags für den Großteil des Kurses als wenig erfolgversprechend und daher demotivierend ansieht. Hingegen ergibt sich weder im Hinblick auf die Lernziele noch auf die Motivation ein Nachteil daraus, dass der Lehrer an dieser Stelle die korrekte Idee benennt. Für die Berechnung des Terms der Ableitungsfunktion sind die

[4] Die Berechnung mittels Polynomdivision ist auch denkbar, dieses Verfahren hat allerdings nur die leistungsstärkste Schülerin im Rahmen einer Differenzierung erlernt.

Schüler nun allerdings in einer komfortableren Situation, als dies bei einem direkten Übergang vom Einstieg zu dieser Rechnung der Fall wäre. Die Schwierigkeit, x und h gleichzeitig zu behandeln, liegt nun isoliert vor, die erforderlichen algebraischen Schritte sind dieselben wie zuvor bei der Betrachtung einer konkreten Stelle. Die bereits durchgeführte Rechnung kann daher als Blaupause dienen, mit deren Hilfe auch schwächere Schüler selbstständig zum Ziel kommen können.
Aus den dargestellten Argumenten ergibt sich, dass die zweite Variante durch die sinnvolle Setzung des Anspruchsniveaus und geeignete Unterstützung motivationale Vorteile bietet. Das verhältnismäßig geschlossene Unterrichtsarrangement steht der erfolgreichen Selbsttätigkeit und dem damit verbundenen Kompetenzerleben nicht entgegen, sondern ist diesem sogar dienlich – im Hinblick auf das Erreichen der Lernziele ist diese Variante daher geeigneter.

Die Stunde endet mit einer Ergebnissicherung und der Mitteilung, dass man die so gefundene Funktion Ableitungsfunktion nennt. Für diesen ersten Zugang wird statt der Modellfunktion mit Gleichung $f(x) = -0.06x^3 + 1.2x^2 + 4.6x$ die algebraisch leichter zu behandelnde Funktion mit Gleichung $f(x) = -0.1x^3 + x^2$ untersucht. Der Unterricht verläuft daher sowohl vom Konkreten zum Abstrakten (erst konkrete Werte von f' berechnen, dann einen Funktionsterm unter Anwendung analoger Schritte herleiten) als auch stundenübergreifend vom Einfachen zum Komplexen.
Als Hausaufgabe berechnen die Schüler die Ableitungsfunktionen von $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto x^3$, um eine Vermutung über eine Regel äußern zu können, die dem Stundenergebnis zugrundeliegt.

Die leistungsstärkste Schülerin hat in einer früheren Differenzierungsphase selbstständig die Polynomdivision erlernt. Es bietet sich daher an, dass sie mit Hilfe dieser Technik die Rechnung reproduziert und die beiden Wege miteinander vergleicht.

Die Durchführung der Rechnung folgt einem vom Autor entwickelten Schema, das im Anhang (mögliche Schülerlösungen) dargestellt ist. In einer Nebenrechnung werden zunächst die Terme $f(x+h)$ und $-f(x)$ *separat* übereinander berechnet und so gruppiert, dass Beiträge, die sich gegeneinander aufheben, übereinander stehen. Durch Berechnen von $-f(x)$ und anschließende Addition werden Vorzeichenfehler vermieden[5]. Das Sortieren nach Potenzen von h hält der Autor für entbehrlich, da im nächsten Schritt ohnehin der Grenzwert für $h \to 0$ gebildet wird. Vielmehr wird dadurch im Hinblick auf den Beweis der Linearität verdeutlicht, dass für jede Basisfunktion individuell nur der Term linear in h relevant ist.

[5] Diese Idee entstammt der Durchführung des Gaußverfahrens, die der Autor selbst als Schüler im Leistungskurs erlernt hat: Anstatt Zeilen zu subtrahieren, werden Zeilen mit negativen Zahlen multipliziert und anschließend addiert, da auf diese Weise deutlicher wird, dass alle Einträge mit dem entsprechenden Vorzeichen zu versehen sind.

3.4 Begründung der wesentlichen methodischen Entscheidungen

Die Stunde folgt im Wesentlichen dem methodischen Prinzip des problemorientierten Unterrichts, dessen lernpsychologische Vorzüge von Bleichroth et al. diskutiert werden [**5**]. Die Motivationsphase ist umfangreicher als sonst üblich, da dem "Entstehen" der Ableitungsfunktion und ihres Graphen durch die Zuordnung von Stellen zu den entsprechenden Werten der Ableitung ein größerer Umfang eingeräumt wird. Der mit dem Berechnen einzelner Werte verbundene Aufwand unterstreicht jedoch die Notwendigkeit, einen geschlossenen Funktionsterm für die Ableitung zu bestimmen. Dies führt zum eigentlichen Problem.

Die Berechnung an einer vorgegebenen Stelle erfolgt zunächst in Einzelarbeit, da es sich hierbei um eine Standardaufgabe handelt, die auch in der anstehenden Klausur individuell gelöst werden können muss. Die am 02.12. abwesenden Schülerinnen können sich jedoch flexibel von ihren Sitznachbarinnen unterstützen lassen. Die Tangentenfunktion des GTR bietet sich hier als Selbstkontrollmöglichkeit an. Um einen nahtlosen Anschluss an die nächste Phase zu ermöglichen, bearbeiten die Schüler arbeitsteilig unterschiedliche Stellen x_0.

Die Ergebnisse werden im Plenum zusammengetragen, wobei die graphische Darstellung parallel mit GeoGebra erfolgt. Dabei werden in einer vorbereiteten Datei nacheinander die Punkte mit den entsprechenden Koordinaten eingeblendet, sodass die Schüler verfolgen können, wie die Diskretisierung des Graphen durch die Zuordnung der Ableitungswerte zu den Stellen entsteht. Das Erstellen eines Punkt-Plots ist zwar auch mit dem GTR möglich, auf die geplante Weise wird der Zuordnungscharakter allerdings stärker betont und kann vom Lehrer im Unterrichtgespräch noch einmal hervorgehoben werden.

Die Lösung des Problems wird von den Schülern kooperativ in Einzel- und Partnerarbeit erbracht. Eine Gruppenarbeit erscheint hier nicht angebracht, da durch die konkrete Rechnung bereits eine deutliche Vorentlastung erzielt wurde und zu befürchten steht, dass diese Sozialform daher zu einem geringeren Grad der Schüleraktivität bzw. bei einigen Gruppenmitgliedern sogar zu Untätigkeit führt. Die gewählte Variante stellt für leistungsschwächere Schüler den besten Kompromiss zwischen der Sicherheit, das Ziel zu erreichen – diese wäre in reiner Einzelarbeit niedriger – und der Notwendigkeit, sich aktiv mit der Rechnung zu beschäftigen, dar. Die Stunde kann nach dieser Phase sinnvoll beendet werden, als Hausaufgabe bereiten sich die Schüler auf eine mögliche Präsentation ihrer Ergebnisse vor.

Die Präsentation erfolgt an der Dokumentenkamera, da auf diese Weise das Ergebnis für den Kurs ohne Übertragen auf eine Folie oder einen Tafelanschrieb zeiteffizient verfügbar wird.

4 Verlaufsplan

Phase	**Lernschritt/Unterrichtsinhalt** (Impulse, Schlüsselfragen, geplantes Lehrerverhalten, erwartetes Schülerverhalten)	**Lernorganisation** (Sozial-/Aktionsformen, Medien)
Begrüßung	L begrüßt den Kurs und stellt den Besuch vor	
Motivation	L bittet um kurze Wiederholung, S beschreiben den Kontext der Reihe und die bisherigen Schritte zur Klärung der Leitfrage	SV/UG
	L: “Wir werden heute die Frage beantworten, wie man die Ableitung an einer beliebigen Stelle berechnen kann. Um den damit verbundenen Begriff der Ableitungsfunktion gut zu verstehen und sie anschließend einfach berechnen zu können, werden wir zunächst für eine Funktion arbeitsteilig die Ableitung an verschiedenen Stellen berechnen.”	LV
	L teilt AB aus, S lesen, L bittet um Erklärung der Aufgabe	EA/SV; AB
	S bearbeiten die Aufgabe und kontrollieren mit dem GTR, L beobachtet	EA/PA; AB, GTR
	L trägt Ergebnisse der Arbeitsphase zusammen	UG; GeoGebra
	S äußern, dass die Punkte auf einer Parabel liegen	
Problem	L: “Unser Ziel sollte es also sein, diese Funktion zu finden, mit deren Hilfe wir die Werte der Ableitung durch Einsetzen des entsprechenden x-Wert finden können. Diese Funktion nennt man Ableitungsfunktion. Habt ihr Ideen, wie man den Term dieser Funktion finden könnte?”	LV
Lösung	S äußern ggf., dass man x statt eines konkreten Werts einsetzen könnte, ansonsten gibt L diesen Weg vor	UG/LV
Tun& Ausf.	S berechnen den Term der Ableitungsfunktion und überprüfen ihr vorheriges Ergebnis durch Einsetzen	EA/PA; AB
	Mögliches Stundenende mit HA: Sich auf eine Präsentation seiner Rechnung vorbereiten	
	S stellen ihre Rechnung vor	SV/UG; Dokumentenkamera
	L blendet den Graphen der Ableitungsfunktion ein	GeoGebra
	S fassen die Idee der Ableitungsfunktion zusammen	SV/UG
	L notiert die Definition der Ableitungsfunktion an der Tafel	LV; Tafel
	Stundenende mit HA: Ableitungsfunktion von x, x^2, x^3 berechnen und versuchen, Beziehung zum Ergebnis der Stunde herzustellen	

5 Literatur

[1] G. Greefrath et al., *Didaktik der Analysis* (Springer, 2016)

[2] Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium / Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen: Mathematik

[3] I. Witzke (2014): Zur Problematik der empirisch-gegenständlichen Analysis des Mathematikunterrichtes. In: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 60, 2-2014, 19-32.

[4] G. Polya: *How to solve it* (Princeton University Press, 2015)

[5] W. Bleichroth et al., *Fachdidaktik Physik* (Aulis, 1999)

6 Erklärung

Ich versichere, dass ich die Schriftliche Arbeit eigenständig verfasst, keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt und die Stellen der Schriftlichen Arbeit, die anderen Werken dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen sind, in jedem einzelnen Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe. Das Gleiche gilt auch für beigegebene Zeichnungen, Kartenskizzen und Darstellungen. Anfang und Ende von wörtlichen Textübernahmen habe ich durch An- und Abführungszeichen, sinngemäße Übernahmen durch direkten Verweis auf die Verfasserin oder den Verfasser gekennzeichnet.

Ort, Datum

Unterschrift

Anhang

- Tafelbild
- Arbeitsaufträge
- mögliche Schülerlösung

Wie kann man die Ableitung an einer beliebigen Stelle berechnen?

bisher: Ableitung an konkreten Stellen x_0 berechnen
jetzt: Funktionsterm zur Berechnung finden

Die Ableitungsfunktion f' zu einer Funktion f ordnet jeder Stelle x die Ableitung der Funktion f an dieser Stelle zu.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Beispiel: $f(x) = -0,1x^3 + x^2 \Rightarrow f'(x) = -0,3x^2 + 2x$.

Ausblick: Regeln zur Berechnung von f' ohne Differenzenquotient herleiten.

Wir betrachten die Funktion f mit Funktionsterm $f(x) = -0.1x^3 + x^2$.
Arbeitsauftrag 1: Berechne mit der "h-Methode" die Ableitung der Funktion f an der Stelle $x_0 = 1$.
Überprüfe anschließend mit der Tangentenfunktion des GTR, ob dein Ergebnis korrekt ist.
Tipp: $(1 + h)^3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3$.

Wir betrachten die Funktion f mit Funktionsterm $f(x) = -0.1x^3 + x^2$.
Arbeitsauftrag 1: Berechne mit der "h-Methode" die Ableitung der Funktion f an der Stelle $x_0 = 2$.
Überprüfe anschließend mit der Tangentenfunktion des GTR, ob dein Ergebnis korrekt ist.
Tipp: $(2 + h)^3 = 8 + 12h + 6h^2 + h^3$.

Wir betrachten die Funktion f mit Funktionsterm $f(x) = -0.1x^3 + x^2$.
Arbeitsauftrag 1: Berechne mit der "h-Methode" die Ableitung der Funktion f an der Stelle $x_0 = 3$.
Überprüfe anschließend mit der Tangentenfunktion des GTR, ob dein Ergebnis korrekt ist.
Tipp: $(3 + h)^3 = 27 + 27h + 9h^2 + h^3$.

Wir betrachten die Funktion f mit Funktionsterm $f(x) = -0.1x^3 + x^2$.
Arbeitsauftrag 1: Berechne mit der "h-Methode" die Ableitung der Funktion f an der Stelle $x_0 = 4$.
Überprüfe anschließend mit der Tangentenfunktion des GTR, ob dein Ergebnis korrekt ist.
Tipp: $(4 + h)^3 = 64 + 48h + 12h^2 + h^3$.

Wir betrachten die Funktion f mit Funktionsterm $f(x) = -0.1x^3 + x^2$.
Arbeitsauftrag 1: Berechne mit der "h-Methode" die Ableitung der Funktion f an der Stelle $x_0 = 5$.
Überprüfe anschließend mit der Tangentenfunktion des GTR, ob dein Ergebnis korrekt ist.
Tipp: $(5 + h)^3 = 125 + 75h + 15h^2 + h^3$.

Wir betrachten die Funktion f mit Funktionsterm $f(x) = -0.1x^3 + x^2$.
Arbeitsauftrag 1: Berechne mit der "h-Methode" die Ableitung der Funktion f an der Stelle $x_0 = 6$.
Überprüfe anschließend mit der Tangentenfunktion des GTR, ob dein Ergebnis korrekt ist.
Tipp: $(6 + h)^3 = 216 + 108h + 18h^2 + h^3$.

Wir betrachten die Funktion f mit Funktionsterm $f(x) = -0.1x^3 + x^2$.
Arbeitsauftrag 1: Berechne mit der "h-Methode" die Ableitung der Funktion f an der Stelle $x_0 = 7$.
Überprüfe anschließend mit der Tangentenfunktion des GTR, ob dein Ergebnis korrekt ist.
Tipp: $(7 + h)^3 = 343 + 147h + 21h^2 + h^3$.

Wir betrachten die Funktion f mit Funktionsterm $f(x) = -0.1x^3 + x^2$.
Arbeitsauftrag 1: Berechne mit der "h-Methode" die Ableitung der Funktion f an der Stelle $x_0 = 8$.
Überprüfe anschließend mit der Tangentenfunktion des GTR, ob dein Ergebnis korrekt ist.
Tipp: $(8 + h)^3 = 512 + 192h + 24h^2 + h^3$.

Arbeitsauftrag 2: Berechne nun die Ableitung von f an einer beliebigen Stelle x.

- Berechne und vereinfache dafür zunächst den Differenzenquotienten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
  Du kannst dich dabei auch an deiner Rechnung aus Arbeitsauftrag 1 orientieren.
  Tipp: $(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$
- Führe den Grenzwert für $h \to 0$ aus.
- Überprüfe durch Einsetzen der Stelle aus Arbeitsauftrag 1, ob du wieder dasselbe Ergebnis erhältst.

Arbeitsauftrag 2: Berechne nun die Ableitung von f an einer beliebigen Stelle x.

- Berechne und vereinfache dafür zunächst den Differenzenquotienten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
  Du kannst dich dabei auch an deiner Rechnung aus Arbeitsauftrag 1 orientieren.
  Tipp: $(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$
- Führe den Grenzwert für $h \to 0$ aus.
- Überprüfe durch Einsetzen der Stelle aus Arbeitsauftrag 1, ob du wieder dasselbe Ergebnis erhältst.

Arbeitsauftrag 2: Berechne nun die Ableitung von f an einer beliebigen Stelle x.

- Berechne und vereinfache dafür zunächst den Differenzenquotienten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
  Du kannst dich dabei auch an deiner Rechnung aus Arbeitsauftrag 1 orientieren.
  Tipp: $(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$
- Führe den Grenzwert für $h \to 0$ aus.
- Überprüfe durch Einsetzen der Stelle aus Arbeitsauftrag 1, ob du wieder dasselbe Ergebnis erhältst.

Arbeitsauftrag 2: Berechne nun die Ableitung von f an einer beliebigen Stelle x.

- Berechne und vereinfache dafür zunächst den Differenzenquotienten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
  Du kannst dich dabei auch an deiner Rechnung aus Arbeitsauftrag 1 orientieren.
  Tipp: $(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$
- Führe den Grenzwert für $h \to 0$ aus.
- Überprüfe durch Einsetzen der Stelle aus Arbeitsauftrag 1, ob du wieder dasselbe Ergebnis erhältst.

Zusatz: Du hast die Polynomdivision bereits kennengelernt. Überzeuge dich, dass du durch Berechnen von $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ und dem anschließender Ausführung des Grenzwerts für $x \to x_0$ dasselbe Ergebnis erhältst.

Mögliche Schülerlösungen

1. $f(x) = -0.1x^3 + x^2 \qquad x_0 = 3$

$$\begin{array}{rccccc}
f(3+h) & = & -0.1 & (3+h)^3 & + & (3+h)^2 \\
 & = & -0.1 & (27+27h+9h^2+h^3) & + & (9+6h+h^2) \\
 & = & -2.7 & -2.7h-0.9h^2-0.1h^3 & +9 & +6h+h^2 \\
-f(3) & = & 2.7 & & -9 & \\
\hline
f(3+h)-f(3) & = & & -2.7h-0.9h^2-0.1h^3 & & +6h+h^2
\end{array}$$

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = -2.7 - 0.9h - 0.1h^2 + 6 + h \to 3.3$$

2.

$$\begin{array}{rccccc}
f(x+h) & = & -0.1 & (x+h)^3 & + & (x+h)^2 \\
 & = & -0.1 & (x^3+3x^2h+3xh^2+h^3) & + & (x^2+2xh+h^2) \\
 & = & -0.1x^3 & -0.3x^2h-0.3xh^2-0.1h^3 & +x^2 & +2xh+h^2 \\
-f(x) & = & 0.1x^3 & & -x^2 & \\
\hline
f(x+h)-f(x) & = & & -0.3x^2h-0.3xh^2-0.1h^3 & & +2xh+h^2
\end{array}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -0.3x^2 - 0.3xh - 0.1h^2 + 2x + h \to -0.3x^2 + 2x$$