Zentrum für schulpraktische Lehrerausbildung Leverkusen
Seminar für das Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen
Brückenstr. 10-12 — 51379 Leverkusen

Unterrichtsentwurf für den 1. Unterrichtsbesuch im Fach Mathematik

Studienreferendar:	Dr. Daniel J. Wieczorek
Ausbildungsschule:	Freiherr-vom-Stein-Gymnasium Leverkusen
Datum:	Freitag, 19.02.2016
Lerngruppe:	EF (x Schülerinnen, y Schüler)
Thema der Unterrichtsreihe:	Funktionsuntersuchungen
Thema der heutigen Stunde:	Wie bestimmt man lokale Extrempunkte rechnerisch? Eine Heranführung an die Kurvendiskussion ausgehend von der Begründung eines Kriteriums durch Zusammenfügen von Argumentationsschritten in Einzel- und Partnerarbeit und einem Anwendungungsbeispiel im Lehrervortrag mit anschließender differenzierender Übungsphase im Lerntempoduett.
Hausaufgabe zur heutigen Stunde:	keine
eingeführtes Lehrbuch:	LS Mathematik Einführungsphase

Inhaltsverzeichnis

1 Aufbau des Unterrichtsvorhabens

Datum	Thema
01.02.2016	Erkunden von Zusammenhängen zwischen Graphen von Funktion und Ableitung, Definition Extrempunkte und erste Beispiele zur Bedeutung in Sachzusammenhängen
12.02.2016	Skizzieren von Funktionsgraphen ausgehend von charakteristischen Punkten
15.02.2016	Monotonie: Definition, Monotoniesatz, Monotonietabelle
19.02.2016	heutige Stunde
22.02.2016	Anwendung: Kurvendiskussion in Sachzusammenhängen I
26.02.2016	Anwendung: Kurvendiskussion in Sachzusammenhängen II
29.02.2016	Komplexere Anwendungen mit GTR-Unterstützung (z.B. Brechungs- und Reflexionsgesetz)
04.03.2016	Ausblick: Hinreichendes Kriterium mit f''
07.03.2016	Übung und Wiederholung

2 Lernziele und Kompetenzen

Durch das gewählte Lernarrangement soll als Stundenziel erreicht werden, dass die Schülerinnen und Schüler[1] das Vorzeichenwechselkriterium für die Existenz lokaler Extrema differenzierbarer Funktionen nennen, begründen und hilfsmittelfrei auf einfache Beispiele ganzrationaler Funktionen anwenden können (inhaltsbezogene Kompetenz, Argumentationskompetenz).

3 Didaktisch-methodische Überlegungen

3.1 Sachanalyse

Eine Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt in $x_0 \in I$ ein lokales Maximum, wenn es eine Umgebung $U_\delta(x_0)$ gibt, sodass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U_\delta(x_0) \cap I$ gilt. Lokale Minima werden analog definiert. Ist f sogar differenzierbar in einer inneren Stelle x_0, so ergibt sich in beiden Fällen aus der Betrachtung des Differenzenquotienten $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sofort das notwendige Kriterium für die Existenz innerer Extremstellen: die Ableitung muss in x_0 verschwinden, d.h. $f'(x_0) = 0$. Dieses Kriterium ist allerdings nicht hinreichend, wie man etwa an $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x) = x^3$ sieht.
Zu einem hinreichenden Kriterium gelangt man über folgende, in Schulbüchern als

[1] Im folgenden Text wird zur besseren Lesbarkeit nur die Formulierung “Schüler” oder “Kursteilnehmer” verwendet; es sind jedoch stets sämtliche Geschlechter gemeint.

Monotoniesatz bezeichnete Aussage: Ist f auf einem Intervall I stetig und im Inneren von I differenzierbar, so wächst f monoton, wenn $f'(x) \geq 0$ auf dem Inneren von I ist; ist f' strikt positiv, so spricht man von strengem monotonen Wachstum und analog für (streng) monotone Abnahme. Üblicherweise folgert man dies aus dem Mittelwertsatz; die Zentrierung moderner Unterrichtsreihen um den Monotoniesatz ist jedoch auch formalmathematisch durch einen unabhängigen Beweis über Intervallschachtelung zu rechtfertigen.
Ist f nun auf einer Umgebung $U_\delta(x_0)$ differenzierbar, so liegt in x_0 ein lokales Maximum, wenn $f'(x) > 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) < 0$ für $x > x_0$ ist. Nach dem Monotoniesatz ist dann nämlich in dieser Umgebung $f(x) < f(x_0)$ für $x \neq x_0$.
Dieses Kriterium ist tatsächlich nur hinreichend, d.h. es gibt differenzierbare Funktionen mit Extremstellen ohne Vorzeichenwechsel. Ein Beispiel liefert die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Term[2]

$$f(x) = \begin{cases} \left(2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) x^4 & \text{für } x \neq 0; \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Sie besitzt in $x = 0$ ein lokales Minimum, die Ableitung oszilliert jedoch in jeder noch so kleinen Umgebung dieser Stelle beliebig schnell um den Wert 0. Die Vorzeichenwechsel häufen sich also um diese Stelle, sodass die im Kriterium geforderte Umgebung von $x = 0$ nicht existiert.

3.2 Lernvoraussetzungen und Lernausgangslage

Um die Kriterien für die Existenz innerer Extremstellen begründen und in einfachen Beispielen für ganzrationale Funktionen praktisch anwenden zu können ist es erforderlich, dass die Schüler

- das notwendige Kriterium für die Existenz lokaler Extremstellen kennen,
- die Definition (isolierter) lokaler Extrema kennen,
- den Inhalt des Monotoniesatzes kennen,
- eine Monotonietabelle für eine differenzierbare Funktion anfertigen können,
- beliebige lineare und quadratische Gleichungen sowie Gleichungen höheren Grades, die eine augenfällige Faktorisierung erlauben, lösen können,
- Nullstellen und Funktionswerte berechnen können,
- charakteristische Punkte in ein Koordinatensystem zeichnen und sinnvoll zu einem Graphen verbinden können.

[2] Dieses Beispiel stammt von W. Burmeister.

Der Autor hat den Kurs zum Halbjahresbeginn übernommen, vor der zu zeigenden Stunde fanden lediglich drei Unterrichtseinheiten statt. Alle oben genannten Fertigkeiten mussten im bisherigen Verlauf der Unterrichtsreihe von den Schülern zum Einsatz gebracht werden. Trotz der ausgiebigen Behandlung der Berechnung von Nullstellen durch Lösung entsprechender Polynomgleichungen durch den vorherigen Kurslehrer bestehen hier bei einigen Schülern Schwierigkeiten.
Der Stand der Kompetenzentwicklung im Bereich Argumentieren, besonders in Bezug auf logische Schlüsse, kann ehrlicherweise bislang nicht eingeschätzt werden.
Einige Kursteilnehmer haben noch Schwierigkeiten, sich im Rahmen kooperativer Lernformen auf die Think-Phase einzulassen und gehen trotz genauer Angabe einer Zeiteinteilung beim Auftauchen der ersten Hürden in die Pair-Phase über.
Entgegen der mathematischen Konvention führt das Lehrbuch Lambacher Schweizer (Giersemehl, 2014) isolierte lokale Extremstellen als lokale Extremstellen ein: Das lokale Extremum wird als kleinster bzw. größter Wert in einer Umgebung definiert, sodass die graphische Interpretation dem anschaulichen Verständnis von Tief- bzw. Hochpunkten entspricht[3]. Der Autor hat den Kurs auf diese Unklarheit hingewiesen und der Bitte des Kurses entsprochen, das Adjektiv "isoliert" wie im Buch wegzulassen. Sofern der allgemeinere Begriff im Unterricht benötigt wird, soll von "verallgemeinerten Extrema" gesprochen werden.

3.3 Didaktische Überlegungen

Die Bestimmung lokaler Extremstellen differenzierbarer reeller Funktionen ist ein wichtiges Anwendungsgebiet der Analysis. Die Behandlung des Themas im Unterricht der Einführungsphase wird unmittelbar durch die inhaltsbezogene Kompetenzerwartung "Die Schülerinnen und Schüler verwenden das notwendige Kriterium und das Vorzeichenwechselkriterium zur Bestimmung von Extrempunkten" im Kernlehrplan legitimiert (*Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein Westfalen Mathematik* 2014).

Die Kursteilnehmer haben in der Einführungsstunde der Unterrichtsreihe bereits Beziehungen zwischen dem Graph einer ganzrationalen Funktion f und dem Graph ihrer Ableitungsfunktion f' selbstständig erkannt und auch formuliert:

- Die Tangente verläuft an Hoch- und Tiefpunkten waagrecht, der Ableitungsgraph schneidet die $x-$Achse.
- Auch an Sattelpunkten ist die Tangente waagrecht.

[3] Es könnte sich hierbei allerdings um einen unbewussten Überarbeitungsfehler handeln. Eine 16 Jahre alte Ausgabe, aus der der Autor selbst als Schüler gelernt hat, geht beim Monotoniebegriff vergleichbar vor und verwendet sogar dieselbe Abbildung, führt aber noch den allgemeineren Begriff lokaler Extrema ein (Baum, 2000).

- Wenn die Tangente steigt/fällt, verläuft der Ableitungsgraph oberhalb/unterhalb der $x-$Achse.

- Der Graph steigt bis zum Hochpunkt/fällt bis zum Tiefpunkt und fällt/steigt danach. Der Ableitungsgraph schneidet die $x-$Achse und geht vom Positiven ins Negative bzw. umgekehrt.

Diese Formulierungen stellen die intuitiv-anschauliche Interpretation der wesentlichen Zusammenhänge aus 3.1 für den Fall *isolierter* Extrema bzw. Sattelpunkte dar. Es ist aber zu beachten, dass Prämisse und Konklusion beim letzten Punkt vertauscht sind. Wir kommen später darauf zurück.
Die Schüler waren nicht in der Lage, diese Aussagen auf die formale Ebene der Funktionen zu transportieren. Angesichts der Tatsache, dass sie im Unterricht eine empirisch-gegenständliche Auffassung von Analysis erwerben, in der Kurven auf dem Zeichenpapier oder im Display des GTR die zentralen Untersuchungsgegenstände sind und hauptsächlich auf der Anschauungsebene argumentiert wird, ist dies allerdings auch nicht verwunderlich (Witzke, 2014). Eine Analyse des verwendeten Schulbuchs untermauert dies: Die Einheit "Hoch- und Tiefpunkte" beginnt mit einer Zuordnung von Funktions- und Ableitungsgraphen, wechselt kommentarlos auf die formale Ebene der Funktionen und springt zwischendurch zurück zu einem Funktionsgraphen.
Der erläuterende Text sorgt zusammen mit der Begriffsbildung des Kapitels leider eher für Verwirrung. Abgesehen davon, dass der Merkkasten mit der Überschrift "Bestimmen von lokalen Extrempunkten einer differenzierbaren Funktion f" und einer Abbildung, die den Graphen von f lediglich als f bezeichnet, der Vermischung von Funktionen und ihren Graphen Vorschub leisten, erschließt sich die Bedeutung des Attributs "hinreichend" beim Vorzeichenwechselkriterium für den Schüler nicht. Dem Mathematiker ist aufgrund der Argumentationskette klar, dass aus dem Vorzeichenwechsel die Existenz eines (isolierten) lokalen Extremums gefolgert wird und dass über die in diesem Fall tatsächlich ebenfalls gültige Rückrichtung nichts ausgesagt wird. *Sprachlich* arbeitet der Text jedoch rückwärts und erwähnt im ersten Satz lokale Extrema. Da die Abbildung zusätzlich nur den Funktionsgraphen und einige Tangentenstücke zeigt, ist mit Verwirrung auf Seiten der Schüler zu rechnen: Wenn das notwendige Kriterium und der Monotoniesatz der Anschauung entnommen werden durften, warum sollte dann der durch die Anschauung gestützte Schluss "die Funktion hat eine lokale Maximalstelle, dort ist die Ableitung 0, rechts davon ist sie negativ, links positiv, und das gilt bei allen lokalen Maxima", der dem vierten Punkt obiger Aufzählung entspricht, verboten sein?
Um nicht in ernstzunehmende Schwierigkeiten bzgl. der Transparenz des Unterrichts

zu geraten[4] und gleichzeitig einen Beitrag zur Anbahnung von Begründungskompetenz zu leisten, bietet es sich an, die einzelnen Schritte des Beweises zu zerschneiden und sie sortieren und ggf. begründen zu lassen. Die Stunde beginnt daher bewusst mit der Herleitung des Kriteriums, um nicht von Beginn an den Kalkülaspekt des gewonnenen Verfahrens in den Fokus zu rücken. Es wird nahtlos an das Ende der vorangegangenen Stunde angeknüpft, in der im Kontext von Monotonietabellen die Vermutung geäußert wurde, dass an Stellen, an denen die erste Ableitung einen Vorzeichenwechsel hat, lokale Extrema liegen.

In diesem ersten Zugang wird bewusst vermieden, das Vorzeichenwechselkriterium als hinreichend zu bezeichnen, da nach obigen Ausführungen die Erklärung im Unterricht gar nicht geleistet werden kann und das Kriterium für lokale Extrema im Sinne des Schulbuchs auch notwendig ist. Sobald die zweite Ableitung zur Verfügung steht, kann zumindest der logische Hintergrund der Begriffe "notwendig" und "hinreichend" sinnstiftend vermittelt werden, denn mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^4$ steht ein für Schüler sofort zugängliches Gegenbeispiel zur Verfügung, bei dem trotz $f''(0) = 0$ in $x = 0$ ein isoliertes lokales Minimum vorliegt.

Dem didaktischen Mantra "so kompliziert wie nötig, aber so einfach wie möglich" folgend wird anschließend die Bestimmung von charakteristischen Punkten des Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3$ als Anwendung vorgeführt. Das Beispiel ist prägnant, denn es gibt zwei Schnittpunkte mit der $x-$Achse und je einen Sattel- und Tiefpunkt. Die Bestimmungsgleichungen lassen sich ohne Aufwand durch Ausklammern von x^3 bzw. x^2 lösen, sodass der Blick auf das zu erlernende Verfahren nicht durch ausufernde Rechnungen verstellt wird. Mit Hilfe der gewonnenen Informationen kann der Graph skizziert werden. Zuletzt erhalten die Schüler die Gelegenheit, das Erarbeitete selbst anzuwenden und zu üben.

3.4 Begründung der wesentlichen methodischen Entscheidungen

Im Rahmen der Erstellung von Monotonietabellen ergab sich die Vermutung, dass Vorzeichenwechsel der Ableitung auf Extremstellen hindeuten. Dies soll als Einstieg der Stunde kurz am OHP wiederholt werden, sodass sich ein natürlicher Anknüpfungspunkt bietet. Im Anschluss werden die Schüler gebeten, kooperativ eine Begründung zu erarbeiten. Aufgrund der bereits diskutierten didaktischen Schwierigkeiten wird davon abgesehen, dies als offenen Arbeitsauftrag zu formulieren. Statt der Rezeption eines Lehrervortrags soll im Hinblick auf die Anbahnung von Argumentationskompetenz die Herleitung durch Anordnung der dazu nötigen Schritte

[4] Im Sinne einer konstruktivistischen Sichtweise auf das Lernen kann man den Schülern keine Erklärung für die Ablehnung obiger Schlusskette geben, an die sie anknüpfen könnten, was ein nachhaltiger Quell für Frustration sein dürfte.

und die Aufforderung zur Begründung ihrer Gültigkeit erfolgen. Die Schüler erhalten hierzu die Schritte auf Papierstreifen, die sie zunächst selbstständig anordnen sollen. In der Pair-Phase wird mit dem Partner unter Begründung der eigenen Anordnung verglichen und man einigt sich auf eine gemeinsame Lösung. Ein Paar stellt in der Share-Phase am OHP mit vorbereiteten Folienstreifen seine Lösung vor und klärt offene Fragen des Kurses. Der Lehrer unterstützt ggf. und sichert anschließend das Ergebnis an der Tafel. Von diesem kooperativen Lernarragement ist ein hoher Grad an Schüleraktivierung zu erwarten (Brüning, 2015). Folienstreifen stellen den optimalen Informationsträger für die Share-Phase dar, denn der Materialaufwand ist im Vergleich zu großen Ausdrucken, die man an die Tafel klebt, gering und ihre Anordnung lässt sich bei Bedarf leicht ändern. Um die eigene Anordnung sofort am OHP reproduzieren zu können sind die Streifen nummeriert. Um auch den Gang der Argumentation dauerhaft verfügbar zu halten wird zum Stundenende noch ein Blatt ausgeteilt, das als Beweis unter das abgeschriebene Ergebnis eingeklebt werden kann. Dies ist optisch ansprechender als das Einkleben der Streifen.

Der Share-Phase kommt zudem die Bedeutung zu, dass Funktionen des Beweises exemplarisch demonstriert werden: Über die bloße, anschaulich gewonnene Vermutung hinaus wird erklärt und im Hinblick auf die bisherigen Unterrichtsinhalte systematisiert, warum die Vermutung korrekt ist[5]. Zudem wird der kommunikative Aspekt des mathematischen Beweises demonstriert (Leuders, 2007).

Auch wenn der kalkülhafte Aspekt der Anwendung des gewonnenen Kriteriums aufgrund der angestrebten Anbahnung von Argumentationskompentenz nicht übertont werden soll, so kann seine Bedeutung im Hinblick auf zentrale Prüfungen nicht von der Hand gewiesen werden. Um allen Kursteilnehmern die Sicherheit zu geben, der Anwendung auch gewachsen zu sein, rechnet der Lehrer an der Tafel das Beispiel vor und lässt es nach einer kurzer Reflexionsphase von einem Kursteilnehmer wiederholen. Dies entspricht gemeinsam mit der Prägnanz des Beispiels dem empfohlenen Vorgehen für die Standardsituation "Verfahren an Lösungsbeispielen erarbeiten" (Barzel, 2014) . Die Tafel ist der optimale Informationsträger, da einerseits die Entwicklung des Beispiels mitverfolgt und es andererseits als gut sichtbare Referenz für die kommende Arbeitsphase genutzt werden kann.

Die Übung erfolgt in differenzierender Weise durch den Einsatz der kooperativen Sozialform "Lerntempoduett": Die Schüler bearbeiten in Einzelarbeit eine Aufgabe, vergleichen anschließend mit einem Partner, der in etwa das gleiche Arbeitstempo hat und bearbeiten dann die nächste Aufgabe (Brüning, 2015). Das Fundamentum besteht dabei aus zwei ähnlichen Anwendungen. Als Additum soll begründet werden, wie sich Extremstellen und -werte einer Funktion unter einfachen Transformationen

[5] Dass sie korrekt ist dürfte aus Schülersicht allerdings unzweifelhaft sein, denn in einer empirischen Theorie hat der Beweis die Funktion der Verifikation verloren (Struve, 1990).

verhalten. Da einige Kursteilnehmer in der vorhergehenden Stunde Schwierigkeiten beim Lösen von Polynomgleichungen hatten, kann der Lehrer hier flexibel Hilfestellung geben, wobei aber darauf zu achten ist, dass andere Schüler während der Arbeitsphase nicht gestört werden. Auf die Herstellung eines Satzes Tippkarten wird verzichtet, da an der Tafel ein durchgerechnetes Beispiel dauerhaft verfügbar ist.
Die Schülerorientierung gebietet es, dass sich der Gang des Unterricht nach der Verarbeitungsgeschwindigkeit des Kurses zu richten hat. Es ist daher denkbar, dass die Stunde nach der Rekapitulation des Beispiels durch den Kurs endet; in diesem Fall wird eine der geplanten Aufgaben als Hausaufgabe bearbeitet. Reicht die verbliebene Zeit mutmaßlich nicht mehr für eine sinnvolle Durchführung der Sozialform aus, so dürfen die Schüler mit der ersten Aufgabe beginnen und erhalten die zweite als Hausaufgabe.

4 Verlaufsplan

Phase	**Lernschritt/Unterrichtsinhalt** (Impulse, Schlüsselfragen, geplantes Lehrerverhalten, erwartetes Schülerverhalten)	**Lernorganisation** (Sozial-/Aktionsformen, Medien)
(Vorbereitung)	L fixiert Überschrift und Datum an der linken Tafel, bereitet OHP und Folie vor (unteren Teil verdecken!), verteilt Papierstreifen, schafft Durchgänge zwischen Tischen	Tafel, OHP
Begrüßung	L begrüßt den Kurs und stellt den Besuch vor	
Einstieg	L bittet um Wiederholung des Zusammenhangs zw. Ableitung und Monotonie (Bedenkzeit geben) L deckt Folie auf, wiederholt die Vermutung **(OHP danach anlassen!)**	SV/UG; OHP LV; OHP
Erarbeitung	L: “Im ersten Teil der Stunde soll mit Hilfe eures bisherigen Wissens begründet werden, *warum* es so ist. Im zweiten Teil geht es um die beispielhafte Anwendung dieses Verfahrens. Da wir noch nie einen solchen Beweis zusammen erarbeitet haben, sollt ihr nicht ins Blaue hinein arbeiten müssen. Vor euch liegen die Beweisschritte auf Papierstreifen. Versucht bitte *in Einzelarbeit*, sie in die logisch korrekte Reihenfolge zu bringen. Dazu habt ihr 5 min Zeit. Danach habt ihr weitere 5 min, um mit eurem Partner zu vergleichen und euch auf eine Reihenfolge inkl. Begründung zu einigen. Anschließend stellt ein Paar am OHP vor.” **(“5 min <u>EA</u>: Reihenfolge / 5 min PA: vergleichen, einigen, begründen“ groß an die rechte Tafel schreiben! Nach PA auswischen!)** S sortieren selbstständig S vergleichen, begründen und einigen sich auf eine gemeinsame Reihenfolge S präsentieren Lösung am OHP und beantworten Fragen, L unterstützt ggf.	LV; Tafel EA; Papierstreifen PA; Papierstreifen SV/UG; Folienstreifen
Sicherung	L fixiert Ergebnis an der Tafel und weist auf schriftliche Begründung hin, die am Stundenende mitgenommen und eingeklebt werden soll	LV; Tafel
Beispiel	L präsentiert Beispiel $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3$ S erhalten Zeit zur Verarbeitung und wiederholen das Beispiel	LV; Tafel EA/SV
	möglicher Ausstieg mit HA: Verfahren selbstständig auf eine andere Funktion anwenden.	
Übung	S bearbeiten Aufgaben und vergleichen ihre Ergebnisse schnelle Schüler bearbeiten Additum L gibt ggf. einzelnen Schülern Hilfestellung beim Lösen der Gleichungen **falls Zeit knapp:** Mit 1 in EA beginnen, 2 als HA	Lerntempoduett; AB EA

5 Quellenverzeichnis

Barzel, B. et al. (2014). *Mathematik unterrichten: Planen, durchführen, reflektieren.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Baum, M. et al. (2000). *Lambacher Schweizer Mathematik 11.* Stuttgart: Klett.

Brüning L., Saum T. (2015). *Erfolgreich unterrichten durch Kooperatives Lernen 1.* Essen: Neue Deutsche Schule.

Giersemehl, I. et al. (2014). *Lambacher Schweizer Mathematik Einführungsphase.* Stuttgart: Klett.

Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein Westfalen Mathematik (2014). Düsseldorf.

Leuders, T., Hrsg. (2007). *Mathematikdidaktik.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Struve, H. (1990). *Grundlagen einer Geometriedidaktik.* Mannheim: BI Wissenschaftsverlag.

Witzke, I. (2014). „Zur Problematik der empirisch-gegenständlichen Analysis des Mathematikunterrichtes". In: *Der Mathematikunterricht, Jahrgang 60 (2).*

6 Erklärung

Ich versichere, dass ich die Schriftliche Arbeit eigenständig verfasst, keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt und die Stellen der Schriftlichen Arbeit, die anderen Werken dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen sind, in jedem einzelnen Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe. Das Gleiche gilt auch für beigegebene Zeichnungen, Kartenskizzen und Darstellungen. Anfang und Ende von wörtlichen Textübernahmen habe ich durch An- und Abführungszeichen, sinngemäße Übernahmen durch direkten Verweis auf die Verfasserin oder den Verfasser gekennzeichnet.

Ort, Datum   Unterschrift

Anhang

- erwartetes Tafelbild
- Kopiervorlage für OHP-Folie zur Monotonie
- Kopiervorlage für Streifen mit Begründungsschritten
- Kopiervorlage mit Begründung des Vorzeichenwechselkriteriums
- Kopiervorlage für das Arbeitsblatt

Wie bestimmt man lokale Extrempunkte rechnerisch? 19.02.2016

Eine Funktion f hat an der Stelle x_0 sicher ein lokales Extremum, wenn die Ableitung f' an dieser Stelle einen Vorzeichenwechsel (VZW) hat.

VZW $-$ nach $+$ $\Rightarrow$ lok. Min. in x_0 $\Rightarrow$ Tiefpunkt $T(x_0|f(x_0))$ des Graphen

$+$ nach $-$ $\Rightarrow$ lok. Max. in x_0 $\Rightarrow$ Hochpunkt $H(x_0|f(x_0))$ des Graphen

Sind die Vorzeichen gleich, so liegt eine Sattelstelle vor.

– – – – – – Tafel wechseln! – – – – – – – – – – –

Bsp. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3$, $f'(x) = x^3 - 2x^2$

1. Kandidaten für lok. Extrema sind die Nullstellen von f'!

   $f'(x) = 0$

   $x^3 - 2x^2 = x^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 2$

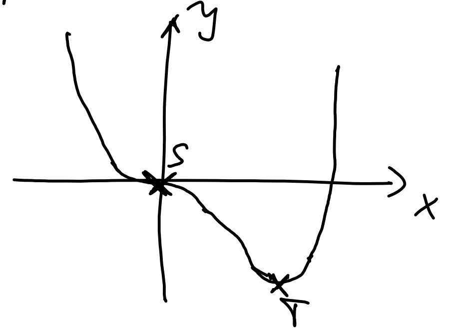
2. Mit einer Monotonietabelle prüfen, ob es an $x=0$ oder $x=2$ einen VZW gibt.

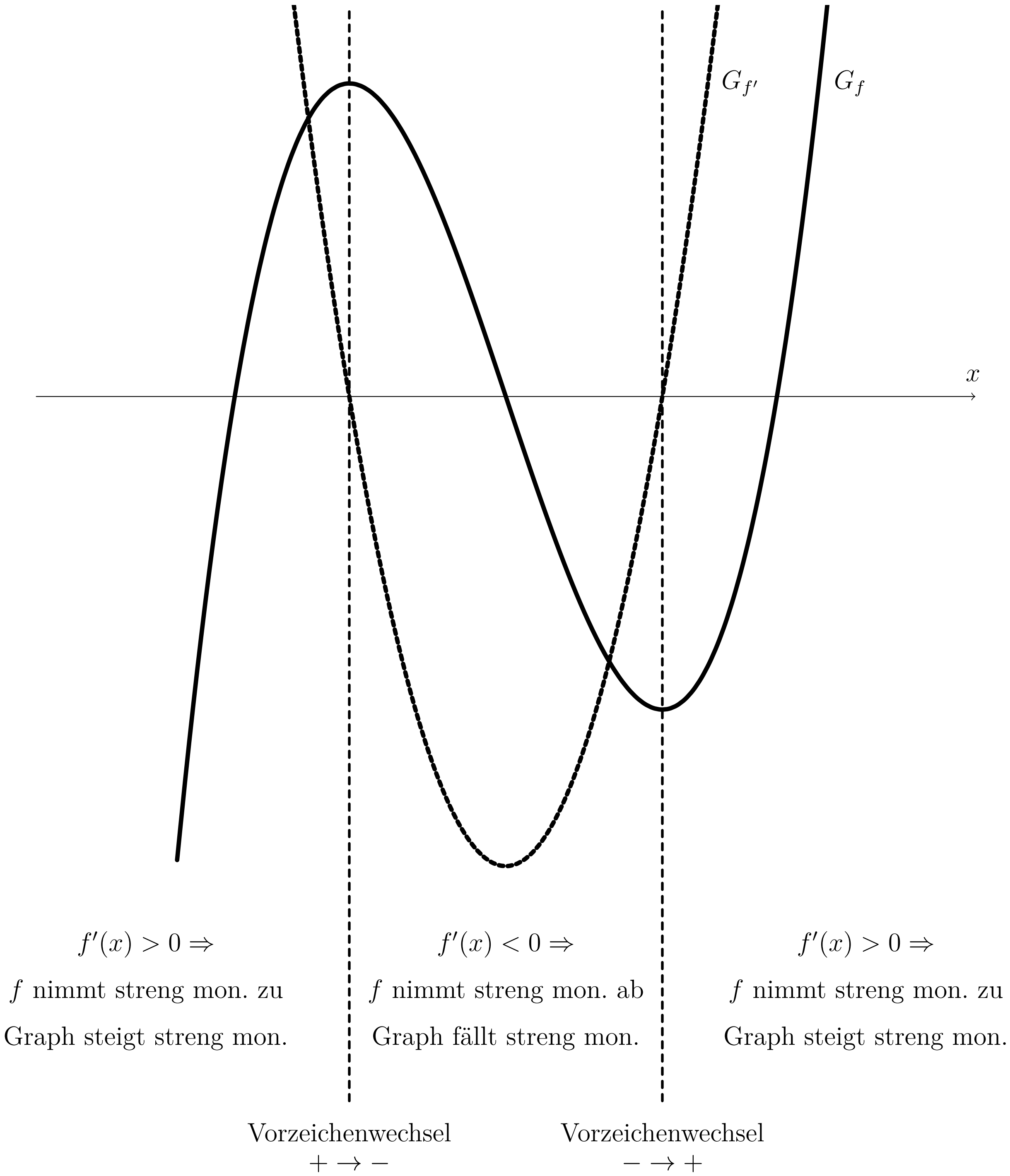
Intervall	$x<0$		$0<x<2$		$x>2$
z.B. x_0	-1	0	1	2	3
$f'(x_0)$	$-3<0$	0	$-1<0$	0	$9>0$
Monotonie	$\searrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

kein VZW
$\Rightarrow$ f hat in $x_0=0$ eine Sattelstelle
$\Rightarrow$ Graph von f hat den Sattelpunkt $S(0|0)$

VZW $-$ nach $+$
$\Rightarrow$ f hat in $x_0=2$ ein lok. Min
$\Rightarrow$ Graph von f hat den Tiefpunkt $T(2|-\frac{4}{3})$

Verlauf des Graphen:





Vermutung: Vorzeichenwechsel der Ableitung zeigen Extremstellen an!

(9) Wir wissen, dass an allen Extrempunkten die Tangente waagrecht verläuft.

(3) Die Ableitung muss an einer Stelle x_0 also eine Nullstelle haben.

(12) Wenn nun $f'(x_0) = 0$ gilt und die Ableitung in einer Umgebung links von x_0 negativ ist, dann

(1) nimmt f dort streng monoton ab,

(4) d.h. der Graph von f fällt streng monoton

(10) und wenn die Ableitung in einer Umgebung rechts von x_0 positiv ist, dann

(8) nimmt f dort streng monoton zu,

(6) d.h. der Graph von f steigt streng monoton

(7) In diesem Fall ist der Funktionswert $f(x_0)$ der kleinste in einer Umgebung.

(5) Die Funktion f hat also an der Stelle x_0 ein lokales Minimum, wenn die Ableitung in x_0 ihr Vorzeichen von $-$ nach $+$ wechselt.

(2) Der Graph der Funktion hat dann den Tiefpunkt $T(x_0|f(x_0))$.

(11) Liegt der umgekehrte Vorzeichenwechsel vor, so handelt es sich um ein lokales Maximum, und der Graph hat einen Hochpunkt.

Begründung: Wir wissen schon, dass an allen Extrempunkten die Tangente waagrecht verläuft. Die Ableitung muss an einer Stelle x_0 also eine Nullstelle haben.
Wenn nun $f'(x_0) = 0$ gilt und die Ableitung in einer Umgebung links von x_0 negativ ist, dann nimmt f nach dem Monotoniesatz dort streng monoton ab, d.h. der Graph von f fällt streng monoton. Wenn die Ableitung in einer Umgebung rechts von x_0 positiv ist, dann nimmt f dort streng monoton zu, d.h. der Graph von f steigt streng monoton. In diesem Fall ist der Funktionswert $f(x_0)$ der kleinste in einer Umgebung, denn die Funktionswerte werden bis zur Stelle x_0 immer kleiner und nehmen danach wieder zu. Die Funktion f hat also an der Stelle x_0 ein lokales Minimum, wenn die Ableitung in x_0 ihr Vorzeichen von $-$ nach $+$ wechselt. Der Graph der Funktion hat dann den Tiefpunkt $T(x_0|f(x_0))$.
Liegt der umgekehrte Vorzeichenwechsel vor, so handelt es sich um ein lokales Maximum, und der Graph hat einen Hochpunkt.

Begründung: Wir wissen schon, dass an allen Extrempunkten die Tangente waagrecht verläuft. Die Ableitung muss an einer Stelle x_0 also eine Nullstelle haben.
Wenn nun $f'(x_0) = 0$ gilt und die Ableitung in einer Umgebung links von x_0 negativ ist, dann nimmt f nach dem Monotoniesatz dort streng monoton ab, d.h. der Graph von f fällt streng monoton. Wenn die Ableitung in einer Umgebung rechts von x_0 positiv ist, dann nimmt f dort streng monoton zu, d.h. der Graph von f steigt streng monoton. In diesem Fall ist der Funktionswert $f(x_0)$ der kleinste in einer Umgebung, denn die Funktionswerte werden bis zur Stelle x_0 immer kleiner und nehmen danach wieder zu. Die Funktion f hat also an der Stelle x_0 ein lokales Minimum, wenn die Ableitung in x_0 ihr Vorzeichen von $-$ nach $+$ wechselt. Der Graph der Funktion hat dann den Tiefpunkt $T(x_0|f(x_0))$.
Liegt der umgekehrte Vorzeichenwechsel vor, so handelt es sich um ein lokales Maximum, und der Graph hat einen Hochpunkt.

Begründung: Wir wissen schon, dass an allen Extrempunkten die Tangente waagrecht verläuft. Die Ableitung muss an einer Stelle x_0 also eine Nullstelle haben.
Wenn nun $f'(x_0) = 0$ gilt und die Ableitung in einer Umgebung links von x_0 negativ ist, dann nimmt f nach dem Monotoniesatz dort streng monoton ab, d.h. der Graph von f fällt streng monoton. Wenn die Ableitung in einer Umgebung rechts von x_0 positiv ist, dann nimmt f dort streng monoton zu, d.h. der Graph von f steigt streng monoton. In diesem Fall ist der Funktionswert $f(x_0)$ der kleinste in einer Umgebung, denn die Funktionswerte werden bis zur Stelle x_0 immer kleiner und nehmen danach wieder zu. Die Funktion f hat also an der Stelle x_0 ein lokales Minimum, wenn die Ableitung in x_0 ihr Vorzeichen von $-$ nach $+$ wechselt. Der Graph der Funktion hat dann den Tiefpunkt $T(x_0|f(x_0))$.
Liegt der umgekehrte Vorzeichenwechsel vor, so handelt es sich um ein lokales Maximum, und der Graph hat einen Hochpunkt.

Bearbeite Aufgabe 1 und 2 im "Lerntempoduett": Beginne in **Einzelarbeit** mit Aufgabe 1 und hebe deine Hand, wenn du fertig bist. Vergleiche deine Lösung mit einer Mitschülerin oder einem Mitschüler, die bzw. der etwa zur gleichen Zeit fertig ist. Kehre zu deinem Platz zurück und wiederhole dies für Aufgabe 2.
Für Schnelle steht danach zur Differenzierung Aufgabe 3 zur Verfügung!

1. Bestimme rechnerisch Extrem- und Sattelpunkte des Graphen von $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ und skizziere den Graph.

2. Bestimme rechnerisch Extrem- und Sattelpunkte des Graphen von $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4$ und skizziere den Graph.

3. Aus einer Funktion f wird eine Funktion g gebildet. Begründe, ob g dieselben Extremstellen bzw. Extremwerte hat wie f.

    - $g(x) = f(x) + 3$
    - $g(x) = 2 \cdot f(x)$
    - $g(x) = -3 \cdot f(x) + 3$
    - $g(x) = f(x - 5)$

Bearbeite Aufgabe 1 und 2 im "Lerntempoduett": Beginne in **Einzelarbeit** mit Aufgabe 1 und hebe deine Hand, wenn du fertig bist. Vergleiche deine Lösung mit einer Mitschülerin oder einem Mitschüler, die bzw. der etwa zur gleichen Zeit fertig ist. Kehre zu deinem Platz zurück und wiederhole dies für Aufgabe 2.
Für Schnelle steht danach zur Differenzierung Aufgabe 3 zur Verfügung!

1. Bestimme rechnerisch Extrem- und Sattelpunkte des Graphen von $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ und skizziere den Graph.

2. Bestimme rechnerisch Extrem- und Sattelpunkte des Graphen von $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4$ und skizziere den Graph.

3. Aus einer Funktion f wird eine Funktion g gebildet. Begründe, ob g dieselben Extremstellen bzw. Extremwerte hat wie f.

    - $g(x) = f(x) + 3$
    - $g(x) = 2 \cdot f(x)$
    - $g(x) = -3 \cdot f(x) + 3$
    - $g(x) = f(x - 5)$