

Unterrichtsentwurf für die 1. Revisionsstunde im Fach Mathematik

Lehrkraft: Dr. Daniel J. Wieczorek
Datum: Donnerstag, 21.06.2018
Zeit: 2. Stunde (8:45 – 9:30)
Lerngruppe: EF (14 Schülerinnen, 11 Schüler)
Raum: A004

Thema der Unterrichtsreihe: Modellieren mit neuen Funktionstypen: Exponentialfunktionen und Potenzfunktionen mit reellen Exponenten

Thema der heutigen Stunde: Wie rette ich eine Person in Seenot? Minimierung der Laufzeit mit Hilfe des grafikfähigen Taschenrechners unter Einsatz kooperativer Lernformen

Inhaltsverzeichnis

1	Aufbau des Unterrichtsvorhabens	3
2	Lernziele und Kompetenzen	4
3	Didaktisch-methodische Überlegungen	4
3.1	Didaktische Sachanalyse	4
3.2	Lernvoraussetzungen	7
3.3	Didaktisch-Methodische Überlegungen	8
4	Verlaufsplan	11
5	Literatur	12
6	Erklärung	13

1 Aufbau des Unterrichtsvorhabens

Datum	Thema/Problemfrage	Lernziel
17.05.2018	Wie viel Cäsium-137 zerfällt in einem Jahr?	Exponentiellen Zerfall an einem Beispiel erläutern können, Potenzgesetze für rationale Exponenten nennen und anwenden können
18.05.2018	Was bedeutet x^a für $a \in \mathbb{R}$ und wie löst man die Gleichung $x^a = y$?	Potenzen mit reellen Exponenten als Grenzwert erläutern können, Gleichung $x^a = y$ lösen können
24.05., 25.05., 31.05., 01.06.2018: entfallen (Feiertag, beweglicher Ferientag, Pfingstferien)		
07.06.2018, 08.06.2018	Welche Bedeutung haben die Parameter a, c im Term der Exponentialfunktion $f(x) = c \cdot a^x$, und wie bestimme ich die Parameter aus gegebenen Daten?	Einfluss der Parameter auf den Funktionsgraphen beschreiben und begründen können, Graphen skizzieren können, Parameter aus gegebenen Punkten, Graphen und Sachzusammenhängen bestimmen können, die Exponentialfunktion zum Modellieren einfacher Wachstumsprozesse verwenden können
13.06.2018: Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase		
14.06.2018, 15.06.2018	Wie erkenne und modelliere ich lineares und exponentielles Wachstum in realen Prozessen mit Hilfe des GTR?	Sich anhand gegebener Daten begründet für ein lineares oder exponentielles Modell entscheiden können, entsprechende Regressionsfunktion mit dem GTR berechnen und zur Modellierung realer Wachstums- und Zerfallsprozesse nutzen können
21.06.2018	Basis und Exponent umgedreht - welchen Einfluss hat der Parameter $a \in \mathbb{R}$ auf den Graph von $f(x) = x^a$? Wie rette ich eine Person in Seenot? Minimierung der Laufzeit mit Hilfe des grafikfähigen Taschenrechners unter Einsatz kooperativer Lernformen	Einfluss des Parameters beschreiben, erläutern und zugehörige Graphen skizzieren können Ein Verfahren zur Minimierung der Laufzeit zwischen zwei Punkten in unterschiedlichen Medien beschreiben und anwenden sowie die zugehörige Zielfunktion herleiten können

2 Lernziele und Kompetenzen

Durch das gewählte Lernarrangement soll als Ziel der Unterrichtseinheit erreicht werden, dass die Schülerinnen und Schüler¹

- ein Verfahren zur Minimierung der Laufzeit zwischen zwei Punkten in unterschiedlichen Medien beschreiben und anwenden sowie die zugehörige Zielfunktion herleiten können.

Die Unterrichtseinheit leistet insbesondere einen Beitrag zur Ausschärfung von prozessbezogenen Kompetenzen im Bereich Modellieren, insbesondere sollen die Schüler [1]

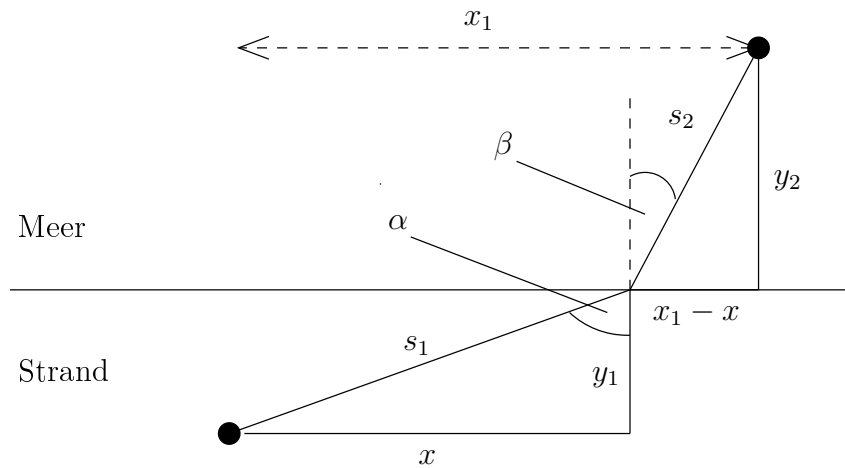
- zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle übersetzen [können],
- mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells erarbeiten [können],
- die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation beziehen [können],
- die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen reflektieren [können],
- am Graphen oder Term einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen verwenden [können].

3 Didaktisch-methodische Überlegungen

3.1 Didaktische Sachanalyse

Um eine in Seenot geratene Person zu retten ist es geboten, möglichst schnell den Ort des Geschehens zu erreichen. Befindet man sich selbst am Strand, so ist der Weg, der durch die Luftlinie vorgegeben ist, in der Regel nicht optimal, da man am Strand schneller unterwegs ist als zu Wasser. Sowohl mathematisch als auch aufgrund persönlicher Erfahrung ist jedoch klar, dass man sich zumindest innerhalb eines Mediums, d.h. sowohl zu Land als auch zu Wasser, jeweils geradlinig fortbewegen sollte. Man muss also davon ausgehen, dass der schnellste Weg aus zwei geraden Strecken besteht, die über einen Knick verbunden sind. Der mathematische Kern der Stunde besteht daher darin, eine Funktion zur Modellierung der Laufzeit aufzustellen und diese aufgrund ihrer Komplexität mit Hilfe des grafikfähigen Taschenrechners (GTR) zu analysieren. Die Situation ist in der folgenden Abbildung dargestellt, wobei x die horizontale Entfernung des Einsprungpunkts vom Startpunkt beschreibt:

¹Im folgenden Text wird zur besseren Lesbarkeit nur die Formulierung “Schüler” verwendet; es sind jedoch stets sämtliche Geschlechter gemeint.



Die Gesamtzeit t ergibt sich mit den Streckenlängen s_1, s_2 und den Geschwindigkeiten v_1, v_2 zu

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} .$$

Die Streckenlängen können mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden:

$$s_1 = \sqrt{x^2 + y_1^2} \quad \text{und} \quad s_2 = \sqrt{(x_1 - x)^2 + y_2^2} .$$

Somit ergibt sich als Zielfunktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+; x \mapsto f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_1 - x)^2 + y_2^2}}{v_2} .$$

Die erste Ableitung ist gegeben durch den Term

$$f'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + y_1^2}} - \frac{x_1 - x}{v_2 \sqrt{(x_1 - x)^2 + y_2^2}} ,$$

die zweite durch

$$f''(x) = \frac{y_1^2}{v_1(x^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y_2^2}{v_2((x_1 - x)^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

Die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$ für die Existenz lokaler Extremstellen lässt sich zwar analytisch lösen, die auftretenden Ausdrücke sind jedoch etwa eine halbe Seite lang und erhellen die Lösung des Problems nicht. Allerdings bringt ein Blick in die Abbildung die Einsicht, dass diese Bedingung gleichbedeutend ist mit

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2} .$$

Um einzusehen, dass diese Gleichung die einzige mögliche Extremstelle festlegt, nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $x_1 \geq 0$ sowie $y_1, y_2 > 0$ an, da andere Fälle trivial sind. Der erste Summand ist für $x < 0$ streng monoton fallend und für $x > 0$ streng monoton wachsend, beim zweiten werden diese Intervalle durch x_1 getrennt. Es muss daher ein globales Minimum im Intervall $[0; x_1]$ geben. Abgesehen vom trivialen Fall $y_1 = y_2 = 0$ ist die zweite

Ableitung stets positiv, d.h. f' ist streng monoton wachsend und hat als stetig differenzierbare Funktion daher genau eine Nullstelle, die zugleich lokale Minimalstelle von f ist. Die Bedingung an die Winkel wird in der Physik als Brechungsgesetz bezeichnet, denn Licht wird an Übergängen zwischen zwei optisch unterschiedlich dichten Medien, d.h. solchen mit unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten, gebrochen.

Diese elegante Lösung ist jedoch zu komplex für den Unterricht der Einführungsphase, da weder die benötigte Kettenregel zur Verfügung steht noch die Argumentation zur Existenz des lokalen und gleichzeitig globalen Minimums nachvollzogen werden kann. Zudem sind viele Schüler aufgrund des vierwöchigen Unterrichtsausfalls in der Jahrgangsstufe 9 nicht mit Grundlagen der Trigonometrie vertraut. Daher wird im Sinne einer didaktischen Reduktion die Aufgabe auf ein angemessenes Niveau gebracht, ohne ihren zunächst verblüffenden Charakter einzubüßen: Die beiden Positionsangaben werden fixiert und eine Geschwindigkeit wird vorgegeben. Bei der Auswahl der Parameter wird darauf geachtet, dass der Weg minimaler Laufzeit zwar einen ausgeprägten Knick aufweist, aber gleichzeitig stark genug von der zweiten naiven Lösung "minimiere die Zeit im Wasser" sowohl in horizontaler Position des Eintauchpunkts als auch der benötigten Gesamtzeit abweicht. Hiefür geeignet erweisen sich $x_1 = 40m$, $y_1 = 10m$, $y_2 = 20m$ und die nicht unrealistische Annahme, dass man auf Sand etwa dreimal so schnell laufen kann wie im Wasser schwimmen. Der Term der Zielfunktion für diese Stunde ist also

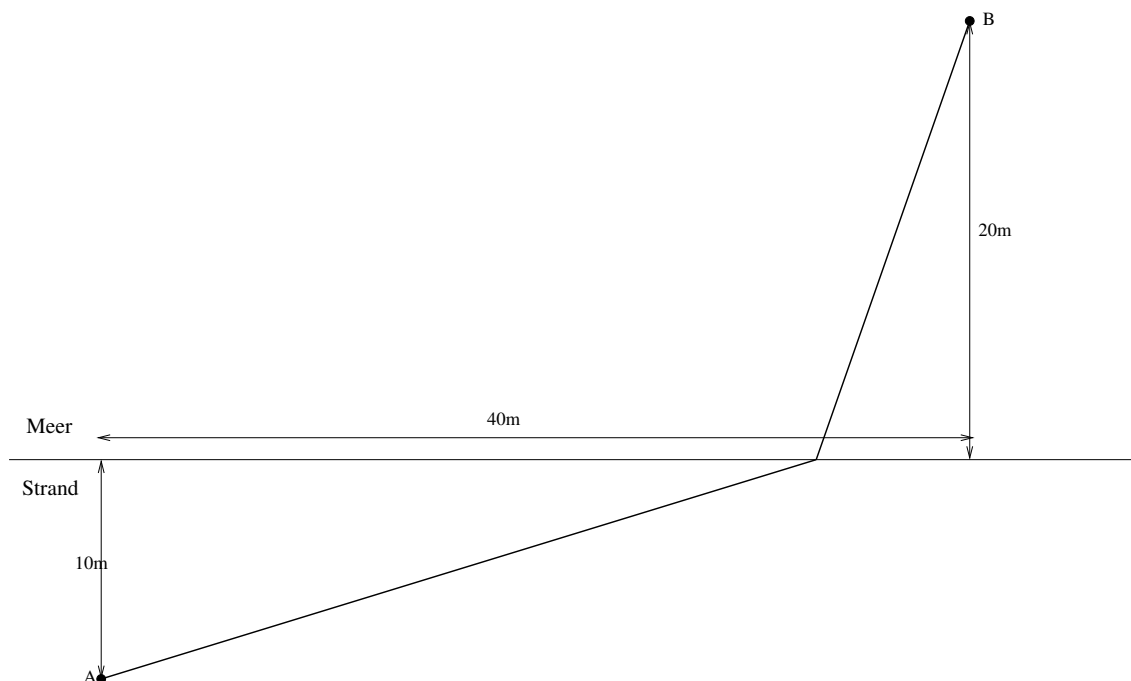
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 100}}{3} + \sqrt{(40 - x)^2 + 400} .$$

Diese Diskussion weist zugleich auch den Weg zu Öffnungs- und Differenzierungsmöglichkeiten: Schüler, die das Fundamentum schnell genug absolviert haben, können der Frage nachgehen, welchen Einfluss die Parameter auf die Lage des globalen Minimums haben und die Ergebnisse mit ihren intuitiven Vorstellungen abgleichen.

Die wesentlichen Eigenschaften der Zielfunktion können mit Hilfe des GTR aus dem Graphen werden:



Man sollte daher etwa nach einer horizontalen Wegstrecke von ca. 33m ins Wasser springen:



3.2 Lernvoraussetzungen

Zum Erreichen der Lernziele müssen die Schüler in fachlicher Hinsicht

- den Satz des Pythagoras nennen und anwenden können,
- Funktionsgraphen unter Wahl eines geeigneten Ausschnitts mit Hilfe des GTR plotten und analysieren sowie die Ergebnisse interpretieren können.

Während der erste Punkt eine Standardkompetenz der Jahrgangsstufe 9 darstellt, ist der zweite eine Kernkompetenz der Sekundarstufe II, die im Hinblick auf das Abitur von so zentraler Wichtigkeit ist, dass sie bei jedem neu eingeführten Funktionstyp erneut aufgegriffen wird. Die Ausprägung dieser Kompetenz schwankt aufgrund der Vorgeschichte der Schüler erheblich, sodass auch differenzierende Maßnahmen im Blick behalten werden müssen: Einige Schüler haben erst seit der EF Kontakt zum GTR, für andere ist dessen Einsatz seit Klasse 7 selbstverständlich. Über den Satz des Pythagoras existieren keine diagnostischen Erkenntnisse, sodass die Wiederholung auch im Hinblick auf die anstehende Reihe zur Vektorrechnung als Hausaufgabe erledigt wurde.

Der Autor unterrichtet den Kurs seit Beginn des Schuljahres sowie einen Teil des Kurses auch in Physik und als Vertiefungsfach im ersten Halbjahr. Es hat sich zu allen Schülern eine positive Beziehung entwickelt – dies kann u.a. durch häufige Gespräche außerhalb der Unterrichtszeit, kleine Gesten wie das gegenseitige Tür-Aufhalten und die Bemerkungen von Schülern gegenüber Kolleginnen und Kollegen, die an den Autor rückgemeldet wurden, untermauert werden. Auf der affektiven Ebene konnte ein besonderer Erfolg erzielt werden, da nach Aussage von Schülern zu Jahresbeginn mehr als die Hälfte der Kursteilnehmer eine Aversion gegen den Mathematikunterricht entwickelt hatte, nun aber 90% sehr gerne den Unterricht besuchen und

dies wesentlich auf den Lehrer zurückführen. Anstrengungen im Bereich des Classroom Managements zu Beginn des Schuljahres haben sich ausgezahlt, sodass der Unterricht nun in einer weitgehend störungsfreien und konstruktiven Atmosphäre mit hoher kognitiver Aktivierung ablaufen kann.

Die Leistungsentwicklung von beinahe allen Kursteilnehmern ist positiv zu bewerten: Bis auf einen Fall, der sich selbst durch individuelle Betreuung während der zahlreichen Arbeitsphasen häufig nur schwer bis gar nicht zur intensiven Auseinandersetzung mit den Aufgaben bewegen ließ, haben es alle anderen Schüler auch trotz einiger zu Beginn bestehender Schwierigkeiten mindestens in den ausreichenden Bereich geschafft. 11 von 25 Schülern sind sogar gut oder sehr gut. Der Satz des Pythagoras als einzige Lernvoraussetzung, deren Anwendung länger zurückliegt, wurde in Form einer Hausaufgabe aufgegriffen, sodass die Stundenziele in fachlicher Hinsicht für alle Schülerinnen und Schüler erreichbar sein sollten.

3.3 Didaktisch-Methodische Überlegungen

Im Alltag begegnen uns häufig Probleme, bei denen es darum geht, Laufzeiten zu minimieren, u.a. bei der Fragestellung, wie man bei einer gegebenen Verkehrssituation möglichst schnell von einem Ort zum anderen gelangt. Minimalprinzipien spielen zudem in der Physik eine herausragende Rolle: Die in dieser Unterrichtsstunde vorgestellten Ideen führen unmittelbar zu einer *Begründung* des Reflexions- und Brechungsgesetzes, und eine Erweiterung dieser Techniken hat über das Prinzip der kleinsten Wirkung in der klassische Mechanik und Elektrodynamik hinaus Relevanz bis hin zur Quantenfeldtheorie [2] [3] [4]. Die Besonderheit der gewählten Problemstellung ist es, dass sie für viele Schüler eine verblüffende, kaum der Intuition entsprechende Lösung hat², die mit den zur Verfügung stehenden analytischen und technischen Mitteln gefunden werden kann. Es handelt sich im Gegensatz zu vielen Aufgaben aus dem Schulbuch und insbesondere aus den zentralen Klausuren um ein tatsächliches, für Schüler versteh- und lösbares Modellierungsproblem mit Gegenwarts- und Zukunftsbezug; selbst beim nächsten Strandurlaub werden die Schüler dazu angeregt, die Welt auch ab und zu durch eine mathematische Brille zu betrachten, was eine effektive Förderung der Winter'schen Grunderfahrung entspricht [6]. Die Behandlung des Stundenthemas ist daher durch die zuvor genannten Kompetenzerwartung des Kernlehrplans [1] legitimiert.

Die Stunde folgt dem Phasierungsschema des problemorientierten Unterrichts nach Roth, dessen lernpsychologische Vorzüge von Bleichroth et al. diskutiert werden [7]. Für die Motivationsphase ist – verständlicherweise – kein geeignetes Foto der Situation auffindbar, das eine vom Strand fotografierte Person zeigt, die zu ertrinken droht. Die Situation wird daher anhand einer selbst erstellten Abbildung vom Lehrer beschrieben. Um das Ergebnis am Stundenende besser wertschätzen zu können, soll zunächst durch alle Schüler spontan und intuitiv der (vermeintlich)

²Bedauerlicherweise ist der Beleg für diese Aussage nicht mehr zu beschaffen. Vor ca. 12 Jahren gab es in der Sendung Stern TV einen Beitrag dazu, in dem verglichen wurde, wie Menschen und Hunde einen Gegenstand aus dem Wasser holen. Hunde wählten dabei verblüffenderweise den optimalen Einsprungpunkt gemäß des Brechungsgesetzes, während Menschen sich geradlinig auf den Gegenstand zubewegten. Auf die Tatsache, dass zumindest Hunde intuitiv den optimalen Einsprungpunkt wählen können, wurde während der Arbeit an diesem Entwurf von Leuders hingewiesen [5].

beste Weg auf dem vorbereiteten Arbeitsblatt eingezeichnet werden. Der Sachzusammenhang vermittelt einen unmittelbaren Handlungsdruck, der durch die Arbeitsanweisung “Notfall! Ein Person droht zu ertrinken! Du kannst nicht lange warten: Zeichne den besten Weg ein, um die Person zu retten.“ akzentuiert wird³.

Zugunsten einer geeigneten Strukturierungsmaßnahme⁴, die bei allen Schülern auf der enaktiven Ebene zu einem vertieften Problemverständnis führt, wird aufgrund der damit verbundenen, sehr hohen Anforderungen auf einen vollständigen Durchlauf des Blum’schen Modellierungskreislaufs [10] jedoch verzichtet. Die Alternative, nämlich Parameter wie das Verhältnis der Geschwindigkeiten an Land und zu Wasser genau wie Start- und Endpunkt selbst wählen zu lassen, birgt folgende Gefahren und wird daher verworfen:

- Die Parameter könnten so ungeschickt gewählt werden, dass das Besondere an der Lösung, nämlich der “Knick” der optimalen Wegstrecke, nicht herausgearbeitet werden kann,
- die Schülern würden mit einem Problem auf einem ungeeigneten Anforderungsniveau konfrontiert, dessen Tragweite sie ggf. gar nicht erfassen könnten,
- die Auswahl geeigneter Strukturierungs- und Unterstützungsmaßnahmen würde erschwert, da diese stark auf die Wahl geeigneter Parameter angewiesen sind.

Stattdessen kommt das vom Autor erfundene “Zeitlineal” zum Einsatz: Es besteht aus zwei Folienstücken, auf die Zeitmarken gedruckt sind. Mit ihrer Hilfe kann man direkt auf dem zur Verfügung stehenden Arbeitsblatt ausmessen, wie lange das Zurücklegen einer gegebenen Strecke zu Wasser oder an Land dauert. Zur Sicherung des Verständnisses sollen die Schüler zunächst in Einzelarbeit begründen, welches Lineal zu welchem Medium gehört⁵. Anschließend folgt ein kurzer Austausch und eine gemeinsame Messung in Partnerarbeit. Sowohl zur Steigerung der kognitiven Aktivierung⁶ als auch zur besseren Vernetzung von Darstellungsformen bietet es sich, bereits hier qualitativ einen hypothetischen Graphen für den Verlauf der benötigten Zeit generieren zu lassen, d.h. die Ergebnisse von der enaktiven auf die ikonische Ebene zu transportieren und diese nachher mit dem exakten Ergebnis, das mit Hilfe der symbolischen Ebene generiert wird, abzugleichen. Während die Schüler Graphen zwar i.d.R. in einem Sachzusammenhang interpretieren können, ist das Erstellen eines Graphen zu einem solchen Sachzusammenhang eine selten vertiefte Kompetenz.

Mit diesem ersten Zugang ist auch ohne komplexe Mathematisierung sofort einsichtig, dass weder die geradlinige Verbindung noch einer der beiden möglichen Extremfälle (ausschließlich vertikale Bewegung an Land oder im Wasser) dem Weg minimaler Laufzeit entspricht. Diese Phase stellt sicher, dass allen Schülern das Problem in seiner vollen Tragweite vollständig bewusst wird; die Arbeit an einem unverstandenen Problem hingegen macht eine kognitive Aktivierung in der Zone der proximalen Entwicklung unmöglich.

³Für diese Idee danke ich Florian Sander (private Mitteilung, 16.06.2018).

⁴Zur Bedeutung geeigneter Strukturierungsmaßnahmen für die Unterrichtsqualität siehe z.B. [8] [9]

⁵An Land legt man eine gegebene Strecke in kürzerer Zeit zurück, also ist das Lineal, bei dem die Zeitmarken einen größeren Abstand haben, für die Zeitmessung an Land geeignet.

⁶Zur Bedeutung der kognitiven Aktivierung für die Unterrichtsqualität siehe ebenfalls [8] [9]

Im Anschluss erfolgt die Mathematisierung des Problems: Die Schüler sollen in der kooperativen Grundform Think-Pair-Share [11] zunächst allein und dann gemeinsam einen mathematischen Zugang zum Problem entwickeln. Dies wäre auch durch ein fragend-entwickelndes Unterrichtsgespräch möglich, jedoch besteht hier die Gefahr, aufgrund eines zu schnellen Vorgehens nur die Leistungsspitze kognitiv zu aktivieren, während die restlichen Schüler das fertige Produkt übernehmen und lediglich anhand des Graphen zu einer Lösung kommen. Ziel ist es, zunächst im Sinne einer Förderung der Kompetenz “zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle übersetzen [können]”, einen Lösungsplan zu entwickeln. Die wesentlichen Schritte sind:

- Eine geeignete Zielfunktion finden, deren Minimum gesucht ist, und dazu
- Terme für die Weglängen zu Wasser und in der Luft aufzustellen,
- daraus die Zeiten zu berechnen,
- die Gesamtzeit als Summe der Teilzeiten zu berechnen.

In einer Plateau-Phase kann das Zwischenergebnis dann im Plenum präsentiert und besprochen werden, wobei auch hier anzustreben ist, die Schüler möglichst selbstständig zu einer mathematikhaltigen Kommunikation anzuregen. Falls möglich übernimmt die Lehrkraft die Rolle des Moderators, der durch geeignete Impulse den Fortgang konstruktiv unterstützt. Je nach Darstellungsleistung der präsentierenden Schüler ist dann noch eine akzentuierte Zusammenfassung nötig. Antizipiert ist, dass mindestens alle Schüler einen zielführenden Lösungsplan erstellen; inwiefern allen selbstständig die Herleitung der komplexen Zielfunktion gelingt, kann nicht vorhergesehen werden. Sollte wider Erwarten kein Paar eine angemessene Zielfunktion entwickeln, die eine verbindliche Weiterarbeit der Lerngruppe sichert, kann dies immer noch in einem fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch geleistet werden, anstatt von vornherein diese Engführung einzuplanen. Die Tatsache, dass die Revision nicht im ersten Teil der Doppelstunde angesetzt werden konnte, macht es dennoch erforderlich, in dieser Phase bereits das verbindliche Ergebnis zu entwickeln; für eine volle Doppelstunde wäre es vorteilhaft gewesen, nach der Vorstellung und Diskussion des Lösungsplans noch mehr eigenständiges Arbeiten zuzulassen.

Die Lösung mit Hilfe des GTR ist Standard und muss auch im Hinblick auf die Anforderungen der Qualifikationsphase von jedem Schüler erwartet werden. Da aufgrund der oben diskutierten Unterstützungsmaßnahme die Problemstellung zunächst eingengt wurde, kann hier die Möglichkeit aufgegriffen werden, die Schüler – ggf. als Hausaufgabe – Hypothesen zum Einfluss der Parameter, insbesondere der Geschwindigkeit, generieren und mit Hilfe des GTR überprüfen zu lassen. Das Erlernete kann mit Hilfe einer Übungsaufgabe zum Reflexionsgesetz gefestigt werden, die zugleich zur Wiederholung trigonometrischer Beziehungen in rechtwinkligen Dreiecken dient und je nach Fortschritt als Hausaufgabe oder aber in der Folgestunde am Freitag gestellt wird. Diese dient insbesondere auch der Überprüfung und Festigung des angestrebten Lernziels “die entsprechende Zielfunktion herleiten können”.

4 Verlaufsplan

Phase	Lernschritt/Unterrichtsinhalt (Impulse, Schlüsselfragen, geplantes Lehrerverhalten, erwartetes Schülerverhalten)	Lernorganisation (Sozial-/Aktionsformen, Medien)
Begrüßung	L begrüßt die Klasse und stellt den Besuch vor	
Einstieg	L erläutert die Problemstellung L bittet Schüler darum, auf Ihrem AB farbig und ohne zu überlegen den vermeintlich Einsprungpunkt zu markieren L blendet den Arbeitsauftrag ein: S sollen zunächst das Zeitlineal verstehen und dann ihre Vermutung damit überprüfen S beschreiben/erläutern das Lineal, messen mit ihrem Partner mehrere Zeiten aus S präsentieren ihre Ergebnisse, benennen ggf. schon als Ziel, dass dieses Ergebnis nun auch im Rahmen einer Mathematisierung erarbeitet werden soll	Beamer EA; AB Beamer EA/PA; AB, Zeitlineale SV; Beamer/DK
Erarbeitung I	L blendet den nächsten Arbeitsauftrag ein: S sollen kooperativ Lösungsvorschläge entwickeln, aber noch nicht ausführen (Prozess betonen, nicht Produkt) L beobachtet die Arbeitsphase, gibt ggf. Hilfestellung	EA/PA; AB
Sicherung I	S präsentieren und diskutieren ihr Ergebnis L moderiert, fasst ggf. zusammen Falls keine perfekte Lösung gefunden wurde: Entwickeln der fehlenden Aspekte im UG	SV/UG; Beamer/DK UG
Erarbeitung II	L blendet differenzierenden Arbeitsauftrag ein S ermitteln mit Hilfe des GTR den optimalen Einsprungpunkt, vergleichen mit ihrer vorherigen Messung und Schätzung S bearbeiten ggf. die Ergänzungsaufgabe und variieren die Parameter L beobachtet und gibt ggf. Hilfestellung	LV; Beamer EA/PA
Mögliches Stundenende mit HA: Bereite für morgen einen Vortrag vor, in dem du die Vorgehensweise darstellst und die Ergebnisse präsentierst		
Sicherung II	S präsentieren ihre Ergebnisse, ggf. auch aus der Parametervariation L fragt ab, wie viele S bei ihrer ersten Schätzung auch nur annähernd richtig lagen L zeigt anhand eines Fotos, dass das gefundene Ergebnis auch die Lichtbrechung an Grenzflächen erklärt	SV LV; Beamer
Stundenende mit HA: Anwendung auf das Reflexionsgesetz		

5 Literatur

- [1] Kernlehrplan für die Sekundarstufe II, Gymnasium / Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen: Mathematik
- [2] Feynman, R. P., Leighton, R. B. und Sands, M.: Feynman Lectures on Physics. Addison-Wesley, Boston, 1961.
- [3] Arnol'd, V.I.: Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer, Heidelberg, 1989.
- [4] Altland, A. und Simons, B. D.: Condensed Matter Field Theory. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [5] Leuders, T.: Können Hunde optimieren? in: Siller, H.-S., Greefrath, G. und Blum, W. (Hrsg.): Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Springer, Heidelberg, 2018.
- [6] Heinrich Winter: Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik Nr. 61, 3746. 1996
- [7] Bleichroth, W. et al.: Fachdidaktik Physik. Aulis, Köln, 1991.
- [8] Blum, W.: Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht – Herausforderungen für Schüler und Lehrer. In: Büchter et al.: Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis. 2006.
- [9] Gold, A.: Guter Unterricht - Was wir wirklich darüber wissen. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 2015.
- [10] Kunter, M. und Trautwein, A.: Psychologie des Unterrichts. Schöningh, Paderborn, 2013.
- [11] Brüning, L. und Saum, T.: Erfolgreich unterrichten durch Kooperatives Lernen. NDS, Essen, 2009.

6 Erklärung

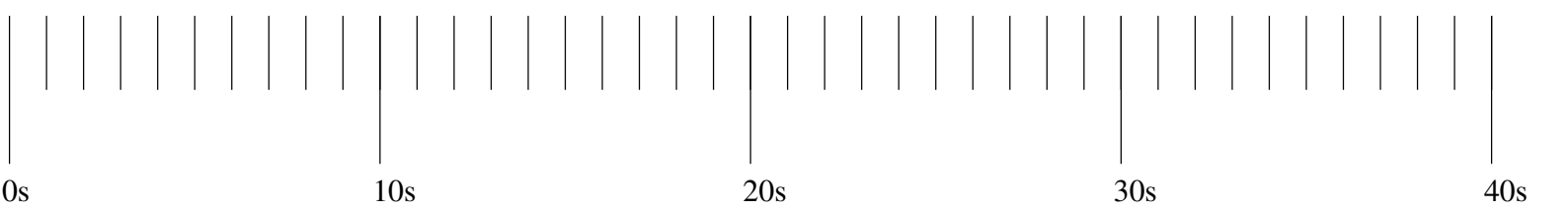
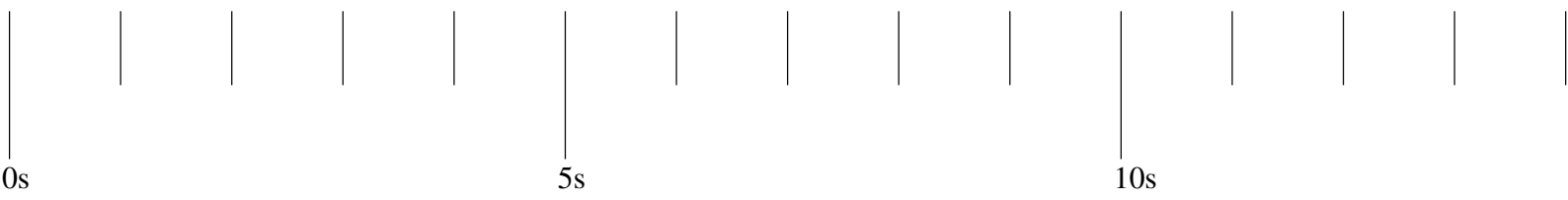
Ich versichere, dass ich den Unterrichtsentwurf eigenständig verfasst, keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt und die Stellen des Entwurfs, die anderen Werken dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen sind, in jedem einzelnen Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe. Das Gleiche gilt auch für beigegebene Zeichnungen, Kartenskizzen und Darstellungen. Anfang und Ende von wörtlichen Textübernahmen habe ich durch An- und Abführungszeichen, sinngemäße Übernahmen durch direkten Verweis auf die Verfasserin oder den Verfasser gekennzeichnet.

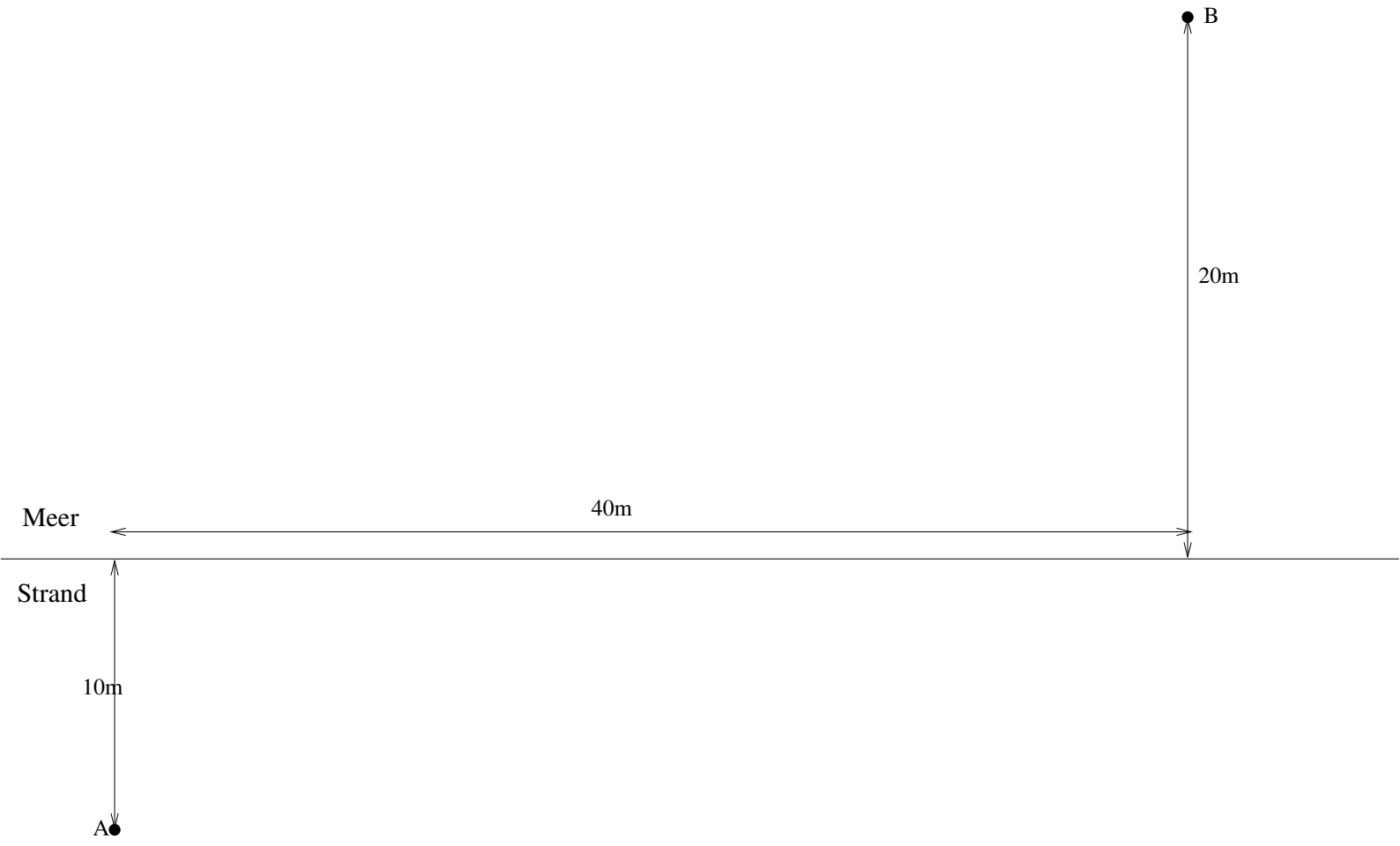
Ort, Datum

Unterschrift

Anhang

- Zeitlineale
- Arbeitsblatt mit Darstellung der Situation
- Beamer-Präsentation







<http://hintergrundbild.org/meer-und-strand-hintergrundbilder>



<http://hintergrundbild.org/meer-und-strand-hintergrundbilder>

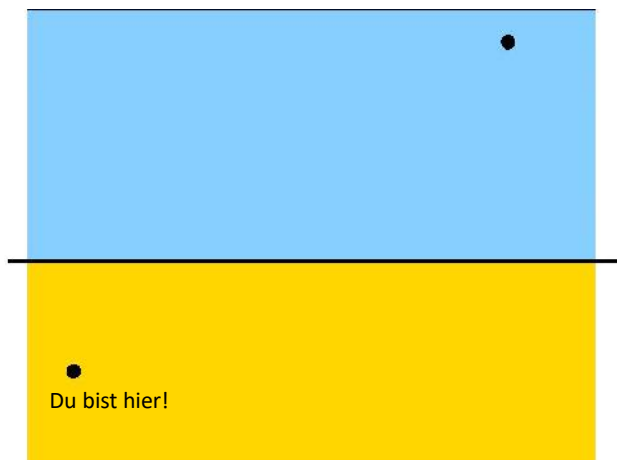
Stell' dir vor:
Du liegst am
Strand...



<https://www.roblox.com/games/1447483356/Drowning-Pirate-Simulator>

Notfall!

Eine Person droht zu ertrinken!



Du bist hier!

Du kannst nicht lange warten:

Drehe das Blatt auf deinem Tisch um und zeichne den besten Weg ein, um die Person zu retten.

Ziel: Ein Gefühl für das Problem entwickeln

Auf eurem Tisch liegen zwei „Zeitlineale“. Damit könnt ihr ausmessen, wie lange man für eine bestimmte Strecke benötigt.

(EA) Begründe, welches „Zeitlineal“ für die Bewegung im Wasser und welches für die Bewegung am Strand geeignet ist.

(PA)

- Messt aus, wie lange man für eure Wege benötigt.
- Ist einer eurer Wege schon optimal? Untersucht, ob andere Wege schneller sind.
- Für Schnelle: Erstellt *qualitativ* einen Graphen, der den Zusammenhang von Einsprungspunkt (x-Achse) und benötigter Zeit (y-Achse) darstellt.

Ziel: Lösungsplan und Zielfunktion entwickeln

(EA)

Entwickle einen Plan, mit dem man eine geeignete Zielfunktion finden kann.

(PA)

- Diskutiere deine Idee mit deinem Partner.
- Notiert den Lösungsplan in Stichpunkten.
- Für Schnelle: Führt den Plan aus und findet eine geeignete Zielfunktion.

Info: An Land schafft man 3 Meter pro Sekunde, im Wasser 1 Meter pro Sekunde.

Ziel: Minimum finden

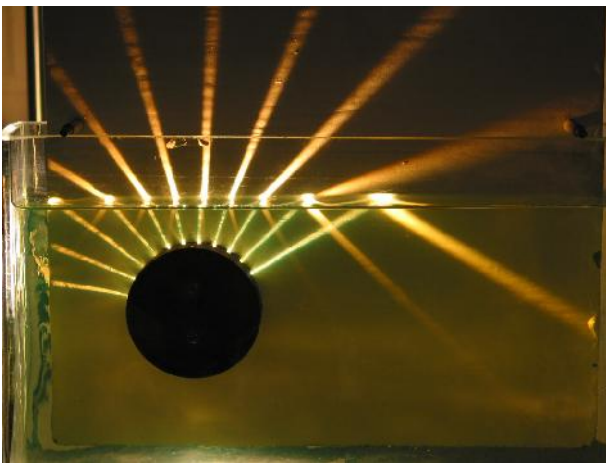
Die Zielfunktion hat den Term

$$f(x) =$$

(EA) Löse das Problem mit Hilfe des GTR.

(PA) Für Schnelle: Stellt Vermutungen auf, wie sich die Lösung des Problems ändert, wenn man die Parameter variiert (Tempo an Land und zu Wasser, Lage der Punkte) und überprüft dies mit dem GTR.

Das Ergebnis spielt u.a. auch in der Optik und der Musik eine wichtige Rolle!



https://physik-und-religion.blogspot.com/2012/11/totalreflexion_13.html

