Musterlösung S. 162 Nr. 11 (auszugweise)

Kursivdruck bedeutet: „Lautes Denken“, d.h. ich versuche dir zu vermitteln, welche Gedanken zur Lösung der Aufgabe führen. Wenn du Verständnisschwierigkeiten hast, dann musst du daran arbeiten, diese Gedanken nachzuvollziehen.

Erste Spalte: geg: r, h.

Man kann mit Radius und Höhe alle anderen Größen sofort durch Einsetzen ausrechnen. [Rechnung wird hier nicht ausgeführt]

Zweite Spalte: geg: M, h.

Ich schaue mir die Formel für die Mantelfläche an: Dort kommen M, h und r vor. Mit M und h kann ich also r ausrechnen, wenn ich die Formel für M nach r umstelle.

ges: r

$$M = 2\pi rh \Leftrightarrow r = \frac{M}{2\pi h} = \frac{24\,m^2}{2\pi \cdot 8m} = 0{,}48m$$

Jetzt habe ich dieselbe Situation wie in Spalte 1, weil ich r und h kenne. [Rest wird hier nicht ausgeführt]

Dritte Spalte: geg: M, O.

Mir fehlen r und h, damit ich wie in Spalte 1 rechnen kann. Wenn ich in die Formeln schaue, dann kommt M in der Formel für O vor, vielleicht kann ich damit etwas anfangen: O = 2G + M. Aha, wenn ich O und M schon kenne, könnte ich wenigstens G ausrechnen: O – M = 2G … In der Abbildung auf Seite 159 heißt das, dass nur noch die beiden Kreise übrig bleiben. Das bringt mich weiter, denn wenn ich die Kreisfläche kenne, kann ich den Radius berechnen.

ges: r

$$O - M = 2\pi r^2 \Leftrightarrow \frac{O - M}{2\pi} = r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{O - M}{2\pi}} = \sqrt{\frac{1{,}6m^2 - 0{,}4m^2}{2\pi}} = 0{,}44m$$

Jetzt kenne ich O, M und r. Mit M und r kann ich h ausrechnen:

geg: M, r　　　ges: h

$$M = 2\pi rh \Leftrightarrow h = \frac{M}{2\pi r} = \frac{0{,}4\,m^2}{2\pi \cdot 0{,}44m} = 0{,}14m$$

Jetzt kenne ich r und h und kann das Volumen auch noch berechnen (wie in Spalte 1).

Hinweis für Kenner (nicht verrückt machen lassen – in der Arbeit darf man so rechnen wie oben): Gerade in der dritten Spalte werden Rundungsfehler gemacht, weil man Zwischenergebnisse wieder einsetzt. Viel eleganter ist es, die Rechenregeln für Wurzeln aus seiner Werkzeugkiste zu holen:

$$h = \frac{M}{2\pi r} = \frac{M}{2\pi\sqrt{\frac{O-M}{2\pi}}} = \frac{M}{\sqrt{(2\pi)^2}\sqrt{\frac{O-M}{2\pi}}} = \frac{M}{\sqrt{2\pi(O-M)}} = \frac{0{,}4m^2}{\sqrt{2\pi(1{,}6m^2 - 0{,}4m^2)}} = 0{,}15m$$

Die Formel für V sieht dann besonders schön aus:

$$V = \pi r^2 h = \pi\left(\sqrt{\frac{O-M}{2\pi}}\right)^2 \sqrt{\frac{M^2}{2\pi(O-M)}} = \pi \cdot \frac{O-M}{2\pi} \cdot \frac{M}{\sqrt{2\pi(O-M)}} = \frac{M\sqrt{O-M}}{2\sqrt{2\pi}} = 0{,}087m^3$$

Wenn man mit den obigen Näherungswerten für r und h rechnet, kommt man auf 0,085m³.