Beim Reaktorunfall in Tschernobyl 1986 wurde unter anderem radioaktives Cäsium-137 freigesetzt. Es hat eine Halbwertszeit von 30 Jahren. Das bedeutet, dass nach 30 Jahren nur noch 50% der ursprünglichen Menge des Stoffs vorhanden ist.

1. Wir nehmen an, dass eine Tonne Cäsium-137 freigesetzt wurde. Vervollständige die Tabelle:

Halbwertszeiten seit 1986	0	1	2	3	4	5
Menge	1t					

2. Gib eine Formel an, die das in der Tabelle dargestellte Wachstum beschreibt.
3. Zu jener Zeit las man manchmal in der Presse, dass das freigesetzte Cäsium in 60 Jahren abgebaut sein würde. Erläutere, welche Art von Wachstum hier vorausgesetzt wurde.
4. Statt in Halbwertszeiten seit 1986 soll die Zeit nun in Jahren seit 1986 angegeben werden. Begründe, dass man dafür die Formel $B(t) = 1 \cdot 0.5^{t/30}$ verwenden kann.
5. Berechne, wie viel Prozent jährlich zerfallen.

Lösungen:

1. Die Menge halbiert sich in jedem Zeitschritt, also

Halbwertszeiten seit 1986	0	1	2	3	4	5
Menge	1t	$\frac{1}{2}t$	$\frac{1}{4}t$	$\frac{1}{8}t$	$\frac{1}{16}t$	$\frac{1}{32}t$

Von einer Spalte zur nächsten wird dabei der Bestand $B(t)$ mit 0.5 multipliziert, da innerhalb einer Halbwertszeit 50% zerfallen.

2. $B(t) = 1 \cdot 0.5^t$. Allgemein gilt $B(t) = B(0) \cdot q^t$, wobei $B(0)$ der Anfangsbestand und q der Wachstumsfaktor ist. $q > 0$ zeigt exponentielle Zunahme an, $0 < q < 1$ exponentielle Abnahme.
3. Bei dieser Aussage wurde lineares Wachstum vorausgesetzt, d.h. dass in jedem Zeitraum von 30 Jahren jeweils eine halbe Tonne Cäsium-137 zerfällt. Dies ist physikalisch nicht sinnvoll: Unabhängig von der Startzeit und der Anfangsmenge sind nach einer Halbwertszeit immer 50% der Anfangsmenge zerfallen, bei linearem Wachstum müsste aber in unserem Beispiel stets eine halbe Tonne in 30 Jahren zerfallen.
4. Der Term $t/30$ im Exponenten dient zur Umrechnung von Jahren in Halbwertszeiten.
5. Man wendet (mutig...) das Potenzgesetz $\left(a^b\right)^c$ an[1]: Es ist $0.5^{t/30} = \left(0.5^{1/30}\right)^t \approx 0.9772^t$. In einem Jahr zerfallen also etwa 2.28%.

Die letzten beiden Teilaufgaben zeigen, warum es in Sachzusammenhängen sinnvoll ist, auch Brüche als Exponenten zuzulassen. Im Gegensatz zum Guthaben eines Sparkontos, das erst zum Jahresende verzinst wird, zerfallen ständig Atomkerne.
Die Zahl $0.5^{1/30}$ wurde dabei so definiert, dass sie die positive Lösung der Gleichung $x^{30} = 0.5$ ist, denn: Rechnet man wie in der 4. Teilaufgabe in Jahren, so muss nach 30 Jahren noch 50% des Anfangsbestands vorhanden sein.

[1] Dabei ignoriert man, dass das Gesetz in Klasse 9 nur für ganze Zahlen als Exponenten begründet wurde.