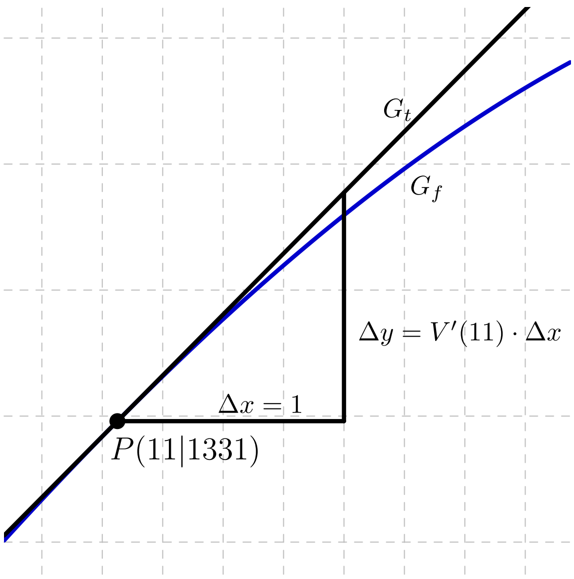
Ergänzung: Was ist die momentane Änderungsrate?

In der Klausur beschrieb die Funktion f mit Funktionsterm $f(x) = -x^3 + 22x^2$ für $0 \leq x \leq 14$ die Menge an Sauerstoff (in Litern), die ein Baum in x Stunden seit 6 Uhr morgens produziert hat. Die momentane Änderungsrate an der Stelle $x = 11$ ist

$$f'(11) = -3 \cdot 11^2 + 44 \cdot 11 = 121 \text{ (Liter pro Stunde)} .$$

Die genaue Bedeutung der momentanen Änderungsrate im Sachzusammenhang erschließt sich mit Hilfe der Abbildung:



Gezeigt wird ein Ausschnit des Graphen G_f der Funktion f sowie des Graphen G_t der Tangente t im Punkt $P(11|1331)$. Die momentane Änderungsrate entspricht geometrisch der Tangentensteigung, und es ergibt sich die Geradengleichung

$$t(x) = 121(x - 11) + 1331 = 121x .$$

Weil die Tangente überall die gleiche Steigung hat, gibt der Wert $t(12) = 121 \cdot (12 - 11) + 1331 = 121 \cdot 1 + 1331$ an, wieviel Sauerstoff zum Zeitpunkt $x = 12$ vorhanden *wäre*, wenn ab dem Zeitpunkt $x = 11$ die momentane Änderungsrate konstant gleich 121 Liter pro Stunde bliebe. Die Zunahme Δy lässt sich wie immer aus dem Steigungsdreieck berechnen, wobei $m_t = f'(11) = 121$ gilt:

$$\Delta y = f'(11) \cdot \Delta x = 121 \cdot 1 .$$

Hierbei wurde $\Delta x = 1$ gesetzt, da wir den Zeitpunkt $x = 12$, d.h. eine Zeiteinheit nach $x = 11$, betrachtet haben. Wir halten also fest:

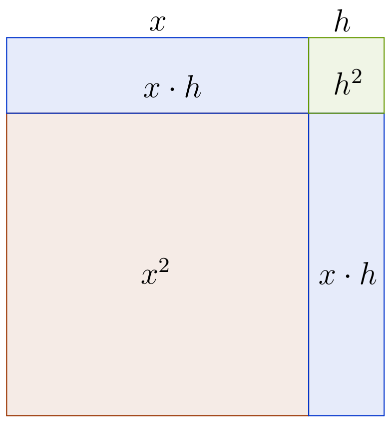
> Die momentane Änderungsrate $f'(x_0)$ zur Zeit x_0 einer Funktion f im Sachzusammenhang gibt an, wie sich der Funktionswert $f(x_0)$ innerhalb der nächsten Zeiteinheit (d.h. von x_0 bis $x_0 + 1$) ändern würde, wenn der Prozess ab x_0 mit der konstanten Änderungsrate $f'(x_0)$ weiterliefe.

Wählt man als Sachzusammenhang z.B. die Strecke $s(t)$, die ein Auto bis zum Zeitpunkt t zurückgelegt hat, so beschreibt die Ableitungsfunktion $s'(t)$ die momentane Änderungsrate der zurückgelegten Strecke. Dies nennt man gemeinhin Momentangeschwindigkeit; sie wird im Auto vom Tachometer angezeigt. Zeigt der Tachometer z.B. 100km/h an, so bedeutet dies: Wenn man eine Stunde lang mit dieser Geschwindigkeit weiterfahren würde, so käme man 100km weit. Nach 6 Minuten wären es hingegen 10km, wie sich aus der Rechnung $100\text{km/h} \cdot 0.1\text{h} = 10\text{km}$ ergibt, nach 3.6 Sekunden wären es 100m. Diese Beispiel zeigt:

> Mit der momentanen Änderungsrate $f'(x_0)$ kann man im Sachzusammenhang berechnen, wie sich der Wert $f(x_0)$ zwischen dem Zeitpunkt x_0 und dem Zeitpunkt $x_0 + \Delta x$ ändern würde, wenn der Prozess mit konstanter Änderungsrate weiterliefe: Es gilt $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Noch ein Beispiel: Was bedeutet $(x^2)' = 2x$ geometrisch?

Die Funktion f mit Funktionsterm $f(x) = x^2$ beschreibt für $x \geq 0$ den Flächeninhalt eines Quadrats mit Seitenlänge x. Die Ableitung $f'(x) = 2x$ beschreibt in diesem Sachzusammenhang die momentane Änderungsrate des Flächeninhalts.
Verlängert man die Seitenlänge von x auf $x+h$, so hat das größere Quadrat den Flächeninhalt $(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$. Der mittlere Summand, $2xh$, entspricht in diesem Beispiel dem Flächeninhalt der beiden blauen Rechtecke. Im Lichte der Diskussion des vorherigen Abschnitts können wir $2xh = f'(x) \cdot \Delta x$ schreiben.
Auch hier gilt: Wenn die momentane Änderungsrate des Flächeninhalt konstant bleiben würde, dann würde die Fläche des größeren Quadrat *exakt* durch Hinzufügen der beiden blauen Rechtecke entstehen. Tatsächlich ist die momentane Änderungsrate aber nicht konstant; dies äußert sich in der Abbildung durch das "Fehlen" des kleinen grünen Quadrats mit Flächeninhalt h^2. Man kann sich aber anschaulich leicht vorstellen, dass der Fehler umso kleiner wird, je weniger die Seitenlänge x prozentual geändert wird. Das grüne Quadrat wird dabei immer kleiner, und der Flächenzuwachs wird immer besser durch die Flächeninhalte der Rechtecke beschrieben.



Lineare Approximierbarkeit

Dieser Abschnitt dient der Differenzierung; für LK-Wähler ist es aber sicher nicht schädlich, ein besseres Verständnis der Begriffe zu erlangen (und ein wenig mehr mit Termen zu jonglieren...)!

Im ersten Beispiel entnimmt man der Abbildung, dass der Unterschied zwischen der Tangente im Punkt P und dem Funktionsgraphen umso kleiner wird, je näher man sich am Punkt P befindet. Beim zweiten Beispiel war es genauso: Je weniger man zur vorhandenen Seitenlänge x hinzufügt, desto genauer wird die Fläche des großen Quadrats durch $x^2 + 2xh$ beschrieben.
Hierin steckt das, was man nach moderner Sichtweise als Grundidee der gesamten Differentialrechnung bezeichnen kann[1]: Dass man eine Funktion f an einer Stelle x_0 ableiten kann bedeutet grob gesagt, dass die Funktionswerte sich in der Nähe von x_0 sehr gut durch die Tangente beschreiben lassen, und dass die Tangente dabei unter allen möglichen Geraden durch den Punkt $P(x_0|f(x_0))$ die beste ist.
Im Folgenden wird präzisiert, was man darunter zu verstehen hat: Wir betrachten noch einmal die Funktion $f(x) = x^2$. Der Funktionswert an der Stelle $x_0 + h$ ist $f(x_0 + h) = x_0^2 + 2x_0h + h^2$. Eine Gerade g durch den Punkt $P(x_0|x_0^2)$ hat die Gleichung $g(x) = m(x - x_0) + x_0^2$. Für den Unterschied (bzw. den Fehler) $r(x_0; h)$ zwischen Funktionswert $f(x_0 + h)$ und der Annäherung mit Hilfe von g ergibt sich mit $g(x_0 + h) = mh + x_0^2$ zu

$$r(x_0; h) = f(x_0 + h) - g(x_0 + h) = (2x_0 - m)h + h^2 \ .$$

Um die rechte Seite richtig wertschätzen zu können benötigt man ein wenig "Zahlenverständnis": Dort steht die Summe einer quadratischen und einer linearen Funktion in h. Quadriert man nun eine Zahl h zwischen 0 und 1, so wird diese Zahl vom Betrag her kleiner, d.h. es gilt $h^2 < |h|$ für $0 < h < 1$. Der Fehler, der sich beim Berechnen der Funktionswerte in einer kleinen Umgebung von x_0 durch Einsetzen in die Geradengleichung einstellt wird also betraglich *unabhängig* von h am kleinsten, wenn der lineare Anteil

[1] Und das ist durchaus erstgemeint: Diese Idee funktioniert auch noch für Funktionen mit "unendlich vielen Variablen"!

verschwindet. Dies ist gerade für $m = 2x_0$ der Fall, d.h. wenn die Geradensteigung der Tangentensteigung im Punkt $P(x_0|x_0^2)$ entspricht! Der Fehler ist $r(x_0; h) = h^2$ und man sagt dann, dass der Fehler schneller als linear gegen Null gehe (für unsere Beispiel geht er quadratisch gegen Null). Insbesondere geht dann nicht nur der Fehler[2], sondern sogar der relative Fehler $\frac{r(x_0;h)}{h}$ gegen Null. Man nennt die Eigenschaft, dass eine Funktion lokal durch eine Gerade so beschrieben werden kann, dass dieser relative Fehler gegen Null geht, *lineare Approximierbarkeit.* Insgesamt gilt

Differenzierbarkeit einer Funktion f in x_0 und lineare Approximierbarkeit in x_0 sind dasselbe. f heißt dabei linear approximierbar in x_0, wenn es eine Zahl m gibt, sodass

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + mh + r(x_0; h)$$

gilt, wobei $\frac{r(x_0;h)}{h}$ auch gegen Null geht. Insbesondere gilt $m = f'(x_0)$.

Man beachte dabei, dass auf der rechten Seite die Tangentengleichung versteckt ist: Setzen wir $h = x - x_0$ ein, so ergibt sich

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x_0, x - x_0) \ .$$

In genau diesem Sinne wird eine differenzierbare Funktion durch die Tangente linear approximiert.

Vermischtes zum Nachdenken

- $f(x) = x^3$ beschreibt für $x \geq 0$ den Rauminhalt eines Würfels. Wiederhole die Diskussion aus dem zweiten Abschnitt für dieses Beispiel.
- Der Rauminhalt einer Kugel ist durch $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ gegeben, ihr Oberflächeninhalt durch $O(r) = 4\pi r^2$. Offensichtlich gilt $V'(r) = O(r)$. Ist das ein Zufall?
- Wie sieht es mit dem Flächeninhalt eines Kreises aus? $A(r) = \pi r^2$, $U(r) = A'(r) = 2\pi r$. Warum ist die Ableitung der Flächeninhaltsfunktion nicht der halbe Umfang (wie beim Quadrat)?
- Zeige: Für "kleine" h gilt
  - $(x + h)^n \approx x^n + nx^{n-1}h$
  - $\sin(h) \approx h$

[2] Der Fehler geht unabhängig von der Geradensteigung m natürlich immer gegen Null, denn die Gerade verläuft ja durch den Punkt $P(x_0|x_0^2)$ auf dem Funktionsgraphen.