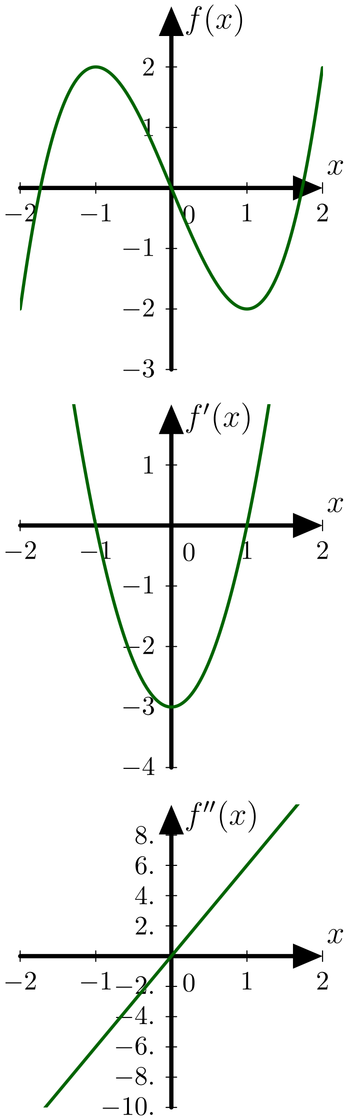
Das hinreichende Kriterium mit f''



Wir betrachten noch einmal die Funktion f mit Funktionsterm $f(x) = x^3 - 3x$. Die erste und zweite Ableitung sind durch $f'(x) = 3x^2 - 3$ und $f''(x) = 6x$ gegeben. Links siehst du Abbildungen der Graphen von f, f'und f''.

Wir wissen bereits: Die Nullstellen der Ableitung $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ gehören zu *möglichen* Extremstellen von f. Dass in x_1 und x_2 tatsächlich ein lokales Maximum bzw. Minimum von f liegen erkennen wir an den Vorzeichenwechseln der ersten Ableitung:
f' wechselt an der Stelle $x_1 = -1$ das Vorzeichen von $+$ nach $-$, also hat f dort ein lokales Maximum. An der Stelle $x_2 = 1$ wechselt f' das Vorzeichen von $-$ nach $+$, also hat f dort ein lokales Minimum.
Nachteil dieses Kriteriums: Man muss Umgebungen von x_1 und x_2 untersuchen. Das Beispiel lässt aber vermuten, dass an Stellen, an denen die erste Ableitung verschwindet *und gleichzeitig* die zweite Ableitung negativ/positiv ist, ein lokales Maximum/Minimum der Funktion liegt.

Dies lässt sich mit dem Monotoniesatz begründen: Wir betrachten hier die Stelle $x_1 = -1$. Die erste Ableitung hat dort eine Nullstelle: $f'(-1) = 0$. Gleichzeitig ist $f''(-1) = -6$, die zweite Ableitung ist dort negativ. Nun ist die zweite Ableitung aber in einer ganzen Umgebung von x_1 negativ (sie kann nicht auf Null oder einen positiven Wert "springen"!). Aus dem Monotoniesatz folgt also, dass die *erste* Ableitung auf dieser Umgebung streng monoton fällt. Dann ist sie aber insbesondere links von x_1 positiv und rechts von x_1 negativ, hat also einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$.

Notwendiges Kriterium für die Existenz lokaler Extremstellen einer differenzierbaren Funktion f an der Stelle x_0: $\mathbf{f'(x_0) = 0}$.

Notwendig bedeutet: Wenn die Ableitung nicht Null ist, kann an der entsprechende Stelle keine lokale Extremstelle sein!

Hinreichendes Kriterium für die Existenz lokaler Extremstellen einer differenzierbaren Funktion f an der Stelle x_0: $\mathbf{f'(x_0) = 0}$ **und** $\mathbf{f''(x_0) \neq 0}$.
Ist $f''(x_0) > 0$, so handelt es sich um ein lokales Minimum, bei $f''(x_0) < 0$ um ein lokales Maximum.

Hinreichend bedeutet: Wenn die Bedingung erfüllt ist, dann liegt an dieser Stelle auf jeden Fall ein lokales Extremum. Aber: Es gibt auch lokale Extrema, an denen $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ gilt, z.B. bei $f(x) = x^4$ an der Stelle $x_0 = 0$.
Das Vorzeichenwechselkriterium ist übrigens für unsere (isolierten!) lokalen Extrema notwendig *und* hinreichend, d.h. es zeigt alle Extremstellen an!