Musterlösung Aufgabe 3.9

Zu beweisen ist die Identität

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Sie bedeutet gemäß der in der Aufgabenstellung genannten Definition des Binomialkoeffizienten (absichtsvoll mit Zeilenumbruch):

Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen

ist gleich

der Summe aus

der Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit (n-1) Elementen

und

der Anzahl der (k-1)-elementigen Teilmengen einer Menge mit (n-1) Elementen.

Üblicherweise hat man als Novize zunächst keine Vorstellung davon, was diese Aussage bedeuten soll. Eine mögliche Herangehensweise ist, sich zunächst ein (nicht-triviales) Beispiel zu überlegen.

Wir wählen den Fall n=3, k=2.

Eine Menge mit drei Elementen ist M = {1,2,3}. Wir können alle Teilmengen sofort angeben und gruppieren sie nach ihrer Mächtigkeit:

0 Elemente: {}	$1 = \binom{3}{0}$
1 Element: {1}, {2}, {3}	$3 = \binom{3}{1}$
2 Elemente: {1,2}, {1,3}, {2,3}	$3 = \binom{3}{2}$
3 Elemente: {1,2,3}	$1 = \binom{3}{3}$

$\binom{3}{2}$ ist die Anzahl der 2-elementigen Teilmengen von M, also: $\binom{3}{2} = 3$.

Der betrachtete Fall der zu beweisenden Gleichung lautet $\binom{3}{2} = \binom{2}{2} + \binom{2}{1}$. Auf der rechten Seite stehen Binomialkoeffizienten, die sich auf eine Menge mit zwei Elementen beziehen. Wir betrachten also zusätzlich die Menge M‘ = {1,2}. Deren Teilmengen sind:

0 Elemente: {}	$1 = \binom{2}{0}$
1 Elemente: {1}, {2}	$2 = \binom{2}{1}$
2 Elemente: {1,2}	$1 = \binom{2}{2}$

Die zu beweisende Gleichung kann also richtig sein, da 3 = 1 + 2 korrekt ist.

Wie ist dies nun zu verstehen?

M entsteht aus M‘ durch Hinzunahme des Elements 3: $M = M' \cup \{3\}$.

Die Teilmenge {1,2} von M‘ ist natürlich auch eine 2-elementige Teilmenge von M. M hat aber noch zwei weitere Teilmengen mit zwei Elementen, die das Elemente 3 enthalten, das in M‘ gar nicht vorkommt: {1,3}, {2,3}. Diese entstehen aus den 1-elementigen Teilmengen {1}, {2} von M‘, indem man ihnen das Element 3 hinzufügt.

Wir erhalten also drei 2-elementige Teilmengen von M, indem wir alle 2-elementigen von M‘ nehmen und zusätzlich alle 1-elementigen Teilmengen von M‘ um das fehlende Element ergänzen.

Damit haben wir die wesentliche Idee für den **Beweis:**

Wir betrachten die Mengen M' mit $|M'| = n - 1$ und $M = M' \cup \{x\}$ mit $|M| = n$.
Die k-elementigen Teilmengen von M kann man in zwei Klassen unterteilen: Diejenigen, die das Element x enthalten, und diejenigen, auf die dies nicht zutrifft.
Alle k-elementigen Teilmengen von M‘ sind auch k-elementige Teilmengen von M, und dies sind alle k-elementigen Teilmengen von M, die das Element x nicht enthalten. Hiervon gibt es $\binom{n-1}{k}$.
Alle weiteren Teilmengen von M entstehen aus den (k-1)-elementigen Teilmengen von M‘ durch Hinzunahme des Elements x. Hiervon gibt es $\binom{n-1}{k-1}$. ■

Bemerkungen:

- Wir haben hier mit Absicht ein „genetisches“ Vorgehen gewählt und transparent gemacht, aus welchen Ideen der Beweis entstanden ist. Mathematik-Lehrbücher gehen i.d.R. nicht so vor und präsentieren nur den Beweis als fertiges Produkt.
- Aus der Vogelperspektive sind wir so vorgegangen:
    - Aussage der Aufgabe verbalisieren/konkretisieren (Problem verstehen)
    - nicht-triviales Beispiel generieren
    - Beweisidee aus dem Beispiel generieren
    - Beweis aufschreiben

  Hierbei handelt es sich um *eine* Problemlösestrategie unter vielen. Die ersten beiden Schritte sollten allerdings immer durchgeführt werden: Ohne die Aufgabenstellung zu verstehen und ein Beispiel angeben zu können, wird man in den meisten Fällen nicht zum Erfolg kommen.

- Die Sitzung im Projektkurs hat deutlich vor Augen geführt, dass derlei Ergebnisse nicht vom Himmel fallen, sondern das Produkt harter geistiger Arbeit sind. Aus diesem Grund muss man sich sofort nach Stellung der Aufgaben mit diesen vertraut machen, um darüber nachzudenken und geeignete Rückfragen zu stellen.
  Im Studium ist es völlig normal, wenn man für einen Übungszettel deutlich mehr als 10 h benötigt!