

Der aktuell verfügbare MMR-Impfstoff (MMR = Masern, Mumps, Röteln) hat eine Erfolgsquote von 95%, d.h. der Impfstoff versagt pro Verabreichung in 5% der Fälle.

- a) In Deutschland sollen gemäß Impfkalender der STIKO Kleinkinder zweimal hintereinander gegen MMR geimpft werden. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die zweimalige Impfung zur Immunität führt, bei 99,75% liegt.

Nicht alle Menschen können geimpft werden, z.B. sprechen eine Tumorerkrankung oder Immunsuppression dagegen. Bei Säuglingen ist die Impfung noch nicht wirksam, sodass im ersten Lebensjahr nicht gegen MMR geimpft wird. Weiterhin haben wir in a) gesehen, dass die Erfolgsquote der Impfung nicht bei 100% liegt. Man geht aber davon aus, dass die Masern ausgerottet werden können, wenn mindestens 95% der Bevölkerung erfolgreich geimpft wurden (Herdenimmunität).

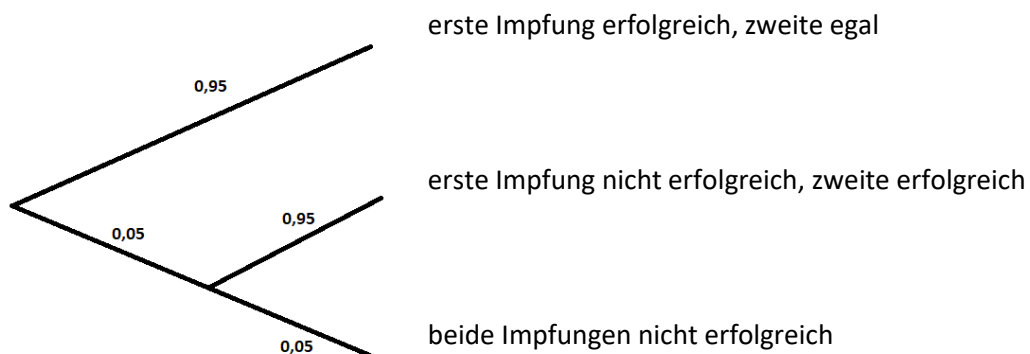
Wir betrachten nun ein Dorf mit 100 Einwohnern.

- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass im Dorf mindestens 95% der Einwohner immun gegen Masern sind, wenn jede Person
- (i) nur einmal geimpft wurde,
  - (ii) zweimal geimpft wurde.
- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 90% der Einwohner immun sind, wenn nur einmal geimpft wurde.
- d) Beurteilen Sie folgende Aussage: Wenn die Impfung zu 95% schützt und wir 95% erfolgreiche geschützte Bürger brauchen, dann genügt es, nur einmal zu impfen.

Lösungen:

- a) X: Anzahl der erfolgreichen Impfungen ist binomialverteilt mit  $n=2$  und  $p=0,95$   
 $P(X>0)=1-P(X=0)=1-0,05^2=0,9975$
- b) X: Anzahl der erfolgreich Geimpften ist binomialverteilt mit  $n=100$  und  $p=0,95$  bzw.  $p=0,9975$   
 (i)  $P(X>94)=1-P(X\leq 94)=61,6\%$   
 (ii)  $P(X>94)$  ca. 100%

Kommentar zu (ii): Hier wurde in Einzelfällen  $p = 0,95$  und  $n = 200$  verwendet. Dies ist nicht möglich, da es für die Herdenimmunität keinen Unterschied macht, ob eine Person einmal erfolgreich oder zweimal erfolgreich geimpft wurde (strenggenommen ist es nicht einmal sinnvoll, von „zweimal erfolgreich geimpft“ zu sprechen). Bei  $n = 200$  müsste das Baumdiagramm folgende Substruktur haben, die nicht mehr zu einer Bernoulli-Kette führt:



Diese Substruktur ist durch ein einzelnes Bernoulli-Experiment mit  $p = 0,9975$  zu ersetzen (die Person, auf die sich diese Stufe des Baumdiagramms bezieht, kann erfolgreich immunisiert worden sein oder eben nicht).

c)  $P(X \leq 90) = 2,8\%$

Auch hier beachten: „höchstens 90%“ schließt 90% mit ein

- d) Die zweifache Impfung führt auch in kleinen Populationen für alle praktischen Belange zu 100%igem Schutz durch Herdenimmunität und ist daher vorzuziehen. Die Fehlvorstellung besteht darin, dass 95% Schutz bedeutet, dass von je 100 Personen immer genau 95 geschützt sind. Das ist unsinnig, denn selbst wenn es so wäre: Angenommen, man hätte 20 Dörfer mit je 95 Geschützten und 5 ungeschützten. Durch Umsiedlungsmaßnahmen könnte man hieraus ein ungeschütztes Dorf mit 100 Einwohner sowie 19 Dörfer mit 100%igem Schutz erzeugen.