

Schriftliche Übung LK Mathematik Q1 (WIC), 01.07.2019

Ein Stab von Forschern aus Medizin, Biologie und Pharmakologie arbeitet daran, für eine bestimmte Krankheit eine bessere Therapie zu entwickeln. Aus umfangreicher Erfahrung weiß man, dass die Erfolgsquote der bisherigen Therapie bei 50% liegt. Die Forschergruppe schlägt nun eine neue Therapie vor, die an einer Zufallsstichprobe von 100 Patienten auf dem 5%-Signifikanzniveau erprobt werden soll.

- a) Leiten Sie begründet eine Entscheidungsregel für die Frage her, bei welchem Studienergebnis die neue Therapie in einer Fachpublikation als besser wirksam bezeichnet werden soll.
- b) (i) Erläutern Sie an diesem Beispiel, was man unter Fehlern erster und zweiter Art versteht.
(ii) Bestimmen die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art.
(iii) Erläutern Sie, warum man ohne weitere Angaben die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art nicht ermitteln kann.
(iv) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art unter der Annahme, dass die neue Therapie in 51% bzw. 70% der Fälle wirksam ist.
(v) Skizzieren Sie qualitativ den Graphen der Operationscharakteristik.

Lösungsskizze:

- a) Die neue Therapie wird als besser bezeichnet, wenn man in der Studie deutlich mehr als 50% geheilte Patienten findet. Konkret: Es müssen so viele Patienten geheilt werden, dass ein solches Ergebnis nur in höchstens 5% der Fälle auftritt, wenn die neue Substanz tatsächlich nur höchstens so wirksam ist wie die alte.
Die Testgröße X : Anzahl der geheilten Patienten ist binomialverteilt mit $n=100$ und $p=0,5$.
 H_0 : Die neue Therapie ist höchstens so wirksam wie die alte ($p \leq 0,5$)
 H_1 : Die neue Therapie ist wirksamer als die alte ($p > 0,5$)
Es gilt: $P(X \leq 57) = 93,3\%$, $P(X \leq 58) = 95,6\%$.
Man verwirft also H_0 , wenn 59, 60, ... 100 Patienten geheilt werden.
- b) (i) Fehler 1. Art: Die neue Therapie ist nicht wirksamer, wird aber durch eine Zufallsschwankung als wirksamer bezeichnet.
Fehler 2. Art: Die neue Therapie ist wirksamer, dies wird aber nicht festgestellt.

(ii) Mit den Ergebnis aus a) ergibt sich, dass $100\% - 95,6\% = 4,4\%$ der Ergebnisse im Ablehnungsbereich von H_0 liegen.

(iii) Wenn die neue Therapie sehr viel wirksamer ist als die alte, dann wird man dies auch fast sicher feststellen – bei $p=0,9$ ist es extrem unwahrscheinlich, dass weniger 59 von 100 Patienten geheilt werden. Gilt tatsächlich nur $p=0,55$, so wird das Studienergebnis aber mit hoher Wahrscheinlichkeit im Annahmehbereich von H_0 liegen. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art hängt also von der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit eines Wirkeintritts ab.

(iv) $n=100$, $p=0,51$: $P(X \leq 58) = 93,4\%$ $n=100$, $p=0,7$: $P(X \leq 58) = 0,7\%$

(v)

