Musterlösungen VIII.4, VIII.5

4.2)

X: Anzahl der blonden Schüler in einer Klasse
X ist binomialverteilt mit n=25 und p=0,2

a) $P(X=5)=B_{25;0,2}(5)$ b) gemeint ist hier: 4 bis 6, also $P(4 \le X \le 6)=F_{25;0,2}(6)-F_{25;0,2}(3)$
c) $P(X \le 5)$ d) $P(6 \le X \le 25)$

4.6)

X: Anzahl der Sonntagskinder
X ist binomialverteilt mit n=28 und p=1/7

a) $\mu = np = 4$ b) $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 1{,}85,\ P(2{,}15 \le X \le 5{,}85) = P(3 \le X \le 5) = 58{,}21\%$
c) hier X binomialverteilt mit n=100 und p=1/7, $\mu = 100 \quad \sigma = 9{,}4 \quad P(91 \le X \le 109) = 69{,}53\%$

4.10)

p fest: je größer n, desto weiter rückt das Maximum nach rechts ($\mu = np$)

n fest: je weiter p von 0,5 abweicht, desto schmäler die Verteilung ($\sigma^2 = np(1-p)$ hat sein Maximum bei p=0,5)

4.11)

Fig. 3: n=10, Maximum bei 8, also p=0,8
Fig. 4: n=20, Maximum bei 8, also p=0,4

5.2)

X: Anzahl der stornierten Buchungen
X ist binomialverteilt mit n=50 und p=0,1

a) „zu viele Buchungen“ = keine oder eine Stornierung, also $P(X \le 1)$
b) „mehr als ein Zimmer frei“ = mehr als drei Stornierungen, also $P(X>3)$

5.3)

X: Anzahl der auskeimenden Zwiebeln
a) X ist binomialverteilt mit n=100 und p=0,95, $P(X \le 90)$
b) n=100 und p=0,85, $P(X>90)$
c) wie a), b), aber mit n=400; Die Unsicherheit nimmt ab, d.h. die Wahrscheinlichkeit einer Fehlentscheidung sinkt. Merke: Je größer der Stichprobenumfang, desto zuverlässiger werden derartige Abweichungen erkannt. Bei einer Million Zwiebeln mit zugrundeliegender Auskeimwahrscheinlichkeit p=0,85 ist es für alle praktischen Belange unmöglich, dass in einem Zufallsexperiment 900001 statt der im Mittel erwarteten 850000 auskeimen.
d) Annahme: Die Keimfähigkeit der Zwiebeln sind unabhängig voneinander. Diese Annahme ist zweifelhaft, wenn die Zwiebeln aus demselben Bett stammen.

5.6)

„mit 90%iger Wahrscheinlichkeit drei (oder mehr) Sechser" = mit 10%iger Wahrscheinlichkeit bis zu zwei Sechser

X: Anzahl der Sechser ist binomialverteilt mit n (unbekannt) und p=1/6 (Achtung: Hier war ein Fehler im Tafelanschrieb. p = 1/6 bleibt weiterhin bestehen.)

$P(X \leq 2) = F_{n;\frac{1}{6}}(2) \leq 0{,}1$ ist ab n=31 erfüllt.

Begründung des Vorgehens: $P(X \geq 3) = F_{n;\frac{1}{6}}(n) - F_{n;\frac{1}{6}}(2)$ kann vom GTR nicht verarbeitet werden (obere Grenze k=n unzulässig)

Zweiter Teil: p=0,7 verwenden

GTR-Tipp: Aufgrund eines Programmierfehlers und der Ungenauigkeit der Touchpads bietet sich folgendes Vorgehen an:

- Tabellenkalkulationsblatt erstellen
- In die Zelle oberhalb von A1 den Befehl **`=seq(a,a,2,50,1)`** einfügen – eine Liste mit Werten 2, 3, 4, …, 50 wird erzeugt
- In die Zelle oberhalb von B1 den Befehl **`=seq(binomcdf(a,1/6,2),a,2,50,1)`** einfügen – eine Liste mit den Werten $F_{2;\frac{1}{6}}(2), F_{3;\frac{1}{6}}(2), \dots, F_{50;\frac{1}{6}}(2)$ wird erzeugt. Man erkennt, dass das oben genannte Ergebnis $n \geq 31$ für den ersten Teil der Aufgabe zutreffend ist.

5.7)

a) X: Anzahl der Sechsen ist binomialverteilt mit n und p=1/6

Keine Sechs würfelt man in n Würfen mit Wahrscheinlichkeit $P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}01$
Das gilt für n≥26.

b) Wie a, aber p=0,5 (Primzahlen 2, 3, 5). Das gilt für n≥7.

c) p=0,5 (die Hälfte der Zahlen ist gerade).

$$P(X = 0) + P(X = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} \leq 0{,}01$$

Das gilt für n≥11. (Spätestens hier bietet es sich an, die entsprechende Gleichung mit der nsolve-Funktion näherungsweise zu lösen.)

d) p=5/6

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \left(\frac{5}{6}\right)^n + n \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} + \binom{n}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \leq 0{,}01$$

Das gilt für n≥48.

Hinweis: Auch ein Vorgehen wie in 5.6 ist natürlich möglich – ausprobieren!

5.9)

a) X: Anzahl der unzufriedenen Fahrgäste ist binomialverteilt mit n=50 und p=0,05

P(X≤2)=54,1%

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 der 50 Fahrgäste unzufrieden sind?

c) Hier ist n unbekannt.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}95^n \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 0{,}1 \geq 0{,}95^n$. Das gilt für n≥45.

d) $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0{,}95^n - n \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95^{n-1} \geq 0{,}9$

Das gilt für n≥77.

Achtung: nSolve liefert hier zunächst eine negative Lösung. Man muss den Startwert anpassen, etwa über

nSolve(1-(0.95)^(n)-n*0.05*(0.95)^(n-1)=0.9,n=100)

e) p ist nun unbekannt, n = 100 und

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = (1 - p)^{100} + 100 \cdot (1 - p)^{99} \cdot p = 0{,}05$$

führt auf p = 4,66%.

5.14)

X: Anzahl der Personen, die den Energieriegel kennen ist binomialverteilt mit n=20 und p.

a) 1) bedeutet, dass weiterhin p=0,25 gilt, obwohl h>0,35 eingetreten ist (Achtung Tippfehler: im Text steht „wenn h den Wert in der Mitte **übersteigt**").
$$P(X > 7) = 1 - P(X \leq 7) = 10{,}2\%$$
2) bedeutet, dass nun p=0,45 gilt und trotzdem h≤0,35 eingetreten ist.
$$P(X \leq 7) = 25{,}2\%$$
b) Nun gilt n=80, der Rest wie oben. 1) 1,7% 2) 4,5%
c) Nun gilt n=1600 und p=0,43.
$$P(X > 720) = 1 - P(X \leq 720) = 5{,}1\%$$
Es zeigt sich: Bei großem Versuchsumfang werden auch kleine Unterschiede mit hoher Sicherheit erkennbar.

5.15)

a) n = 35500, p = 0,5, dann ist das 2σ-Intervall [17562; 17938]. Die beobachteten Häufigkeiten liegen weit außerhalb des Intervalls, sodass man die Annahme bezweifeln muss.

b) n = 355, p = 0,5, dann ist das 2σ-Intervall [159; 196]. Auch hier bezweifelt man die Annahme, allerdings liegen die beobachteten Werte nur knapp außerhalb des Intervalls (dies liegt wieder an der kleineren Stichprobe).