

Normalform → Scheitelpunktform

Erinnerung: binomische Formel $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Beispiel 1: Der Faktor vor x^2 ist 1.

$$y = x^2 - 6x + 10$$

Nebenrechnung: Vor x steht der Faktor -6 . Wir teilen durch 2 und erhalten b für die binomische Formel: **$b = -6:2 = -3$** . Um ein vollständiges Binom zu erhalten, fehlt noch **$b^2 = (-3)^2 = 9$** .

Wir addieren die fehlende **9** und ziehen sie direkt wieder ab, um den Funktionsterm nicht zu ändern:

$$y = x^2 - 6x + \mathbf{9} - \mathbf{9} + 10 = (x^2 - 6x + \mathbf{9}) - \mathbf{9} + 10$$

Die ersten drei Summanden in der Klammer können jetzt mit der binomischen Formel umgeformt werden:

$$y = (x - \mathbf{3})^2 - 9 + 10 = (x - 3)^2 + 1$$

$$\text{Probe: } y = (x - 3)^2 + 1 = x^2 - 6x + 9 + 1 = x^2 - 6x + 10$$

Beispiel 2: Der Faktor vor x^2 ist nicht 1.

$$y = -2x^2 - 20x + 4$$

Um ähnlich wie in Beispiel 1 zu verfahren, muss zunächst der Faktor -2 ausgeklammert werden (inkl. Zwischenschritt):

$$y = -2 \left(\frac{-2}{-2}x^2 - \frac{20}{-2}x \right) + 4 = -2(x^2 + 10x) + 4$$

In der Klammer wird jetzt verfahren wie oben, hier ist $b = 10:2 = 5$ und wir müssen $5^2 = 25$ addieren und wieder abziehen:

$$y = -2(x^2 + 10x + 25 - 25) + 4$$

Als letztes stört noch der Summand -25 in der Klammer, bevor wir die binomische Formel anwenden können. Wir müssen daran denken, diesen Faktor wieder mit -2 zu multiplizieren:

$$y = -2(x^2 + 10x + 25) - 2 \cdot (-25) + 4 = -2(x + 5)^2 + 54$$

Anleitung zum Üben:

- Schreibe dir eine beliebige quadratische Funktion in Normalform auf.
- Führe exakt die obigen Schritte durch.
- Überprüfe dein Ergebnis, indem du sowohl die Normalform als auch die Scheitelpunktform in den GTR eingibst. Dabei muss dieselbe Parabel herauskommen, sonst hast du dich verrechnet.

Gleichungen lösen mit der Scheitelpunktform

Beispiel: Löse die Gleichung $-5(x - 2)^2 - 10 = -510$.

Erster Schritt: Auf beiden Seiten +10 rechnen.

$$-5(x - 2)^2 = -500$$

Zweiter Schritt: Auf beiden Seiten durch -5 teilen.

$$(x - 2)^2 = 100$$

Dritter Schritt: Wurzel ziehen und beachten, dass sowohl $10^2 = 100$ als auch $(-10)^2 = 100$ gilt.

$$x - 2 = \pm 10$$

Vierter Schritt: Auf beiden Seiten +2 rechnen.

$$x = 2 \pm 10$$

Die erste Lösung ist also $x_1 = 2 + 10 = 12$, die zweite Lösung ist $x_2 = 2 - 10 = -8$.

Zum Üben:

$$-10(x + 3)^2 + 16 = -24$$

$$3(x - 10)^2 - 17 = 10$$

$$-2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{25}{2}$$

Anleitung zur Selbstkontrolle: Setze deine Lösung in die ursprüngliche Gleichung ein und überprüfe, ob beide Seiten gleich sind.